在庫理論とSCMへの展開

名古屋工業大学　中出康一

内容

新聞売り子問題（１期間）

発注費用をもつ場合（１期間，多期間）

供給・販売の２者からなるモデル（１期間）

販売価格による需要変動を考慮した新聞売り子問題

卸売価格，販売価格等を考慮した供給・販売からなるモデル

新聞売り子問題（newsvendor problem)

p: 販売価格
w: 仕入れ価格
f(x): 需要密度関数　（分布関数F(x)）　$L \leq x \leq U$上で$f(x)>0$
v: salvage 価格（売れ残りに対する処理売上）
g: 品切れに対する損失費用

仮定　$p>w>0$, $w>v$, $g \geq 0$.

利益最大になるように仕入れ量Qを決定したい.

実際の販売量　min (Q,D)

期待販売量　S(Q)=E[min(Q,D)]

$$= \int_0^Q xf(x)dx + Q(1-F(Q)) = \int_0^Q (1-F(x))dx = Q - \int_0^Q (Q-x)f(x)dx$$

$$S'(Q) = 1-F(Q), \quad S''(Q) = -f(Q)$$

期待残余在庫　$I(Q)=E[[Q-D]^+] = \int_0^Q (Q-x)f(x)dx$

期待品切れ数　$L(Q)=E[[D-Q]^+]$　ここで$[a]^+=\max(a,0)$.　$[a]^+-[-a]^+=a$

$$Q=S(Q)+I(Q),\ E[D]=S(Q)+L(Q)$$

販売者の期待利益 $\Pi_r(Q)$

$$\Pi_r(Q) = pS(Q) + vI(Q) - gL(Q) - wQ = (p+g-v)S(Q) - (w-v)Q - gE[D]$$

$$\Pi_r'(Q) = (p+g-v)S'(Q) - (w-v)$$

仮定よりp+g-v>0となるから $\Pi_r''(Q) < 0$

$\Pi_r(Q)$ を最大にするQは $1-F(Q) = \dfrac{w-v}{p+g-v}$ を満たす，すなわち $Q^* = F^{-1}\left(\dfrac{p+g-w}{p+g-v}\right)$

初期在庫xのときの最適発注量（1期間問題）

固定発注費用0のとき，y-xだけ発注(在庫水準をyまで引き上げる)したときの利得

$$pS(y)+vI(y)-gL(y)-w(y-x)=\Pi_r(y)+wx$$

最後のwxの項のみ異なる．したがって，

x<Q*ならば，Q*-xだけ発注する．
x>Q*ならば，発注しない．

固定発注費用K(>0)がかかるとき

$$\pi(x,y)=pS(y)+vI(y)-gL(y)-w(y-x)-K\delta(y-x)$$
$$=G(y)-K\delta(y-x)+wx$$

$$\delta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$G(y)=pS(y)+vI(y)-gL(y)-wy$:yについて凹関数

x<Q*のとき，発注するならば，y=Q*になるように発注することが最適．
このときの利得は $\pi(x,Q^*)=G(Q^*)+wx-K$

$$\pi(x,Q^*)=G(Q^*)+wx-K<\pi(x,x)=G(x)+wx$$

ならば，発注しないことが最適．

$G(Q^*)-K>G(x)$ ならば，Q*-xだけ発注することが最適．

初期在庫xのときの最適発注量（多期間問題）

(例）受注残有り(backlog)

$h_t(x)$:時刻t，在庫量xから開始したときの時刻Tまでの最大総期待利得

$$h_t(x) = \max_{y \geq x} \{G(y) - K\delta(y-x) + wx + \int_0^{\infty} h_{t+1}(y-z)f(z)dz\}, \quad t = 0,1,\ldots,T,$$

$h_{T+1}(x) = 0$ (G(y)内の残存費用vは在庫管理費用にあたる)

y>xの範囲で右辺を最大にするyをS_tとする． $H_t(y) = G(y) + \int_0^{\infty} h_{t+1}(y-z)f(z)dz$

x<S_tのとき，

$H_t(S_t) - K + wx > H_t(x) + wx$ → S_t-x分発注する．

不等号逆向き→ 発注しない．

G(y)が凹関数（-G(y)が凸関数）のとき，$H_t(x)$がK-凹性（$-H_t(x)$がK-凸性）をもつ

- $H_t(S_t) - K = H_t(x)$となるx=s_t(<S_t)が唯一存在
  （したがって，$x' \in (s_t, S_t)$について発注することはない）
- x>S_tについて， $H_t(S') - K > H_t(x)$となる組(x,S’)(S’>x) は存在しない．

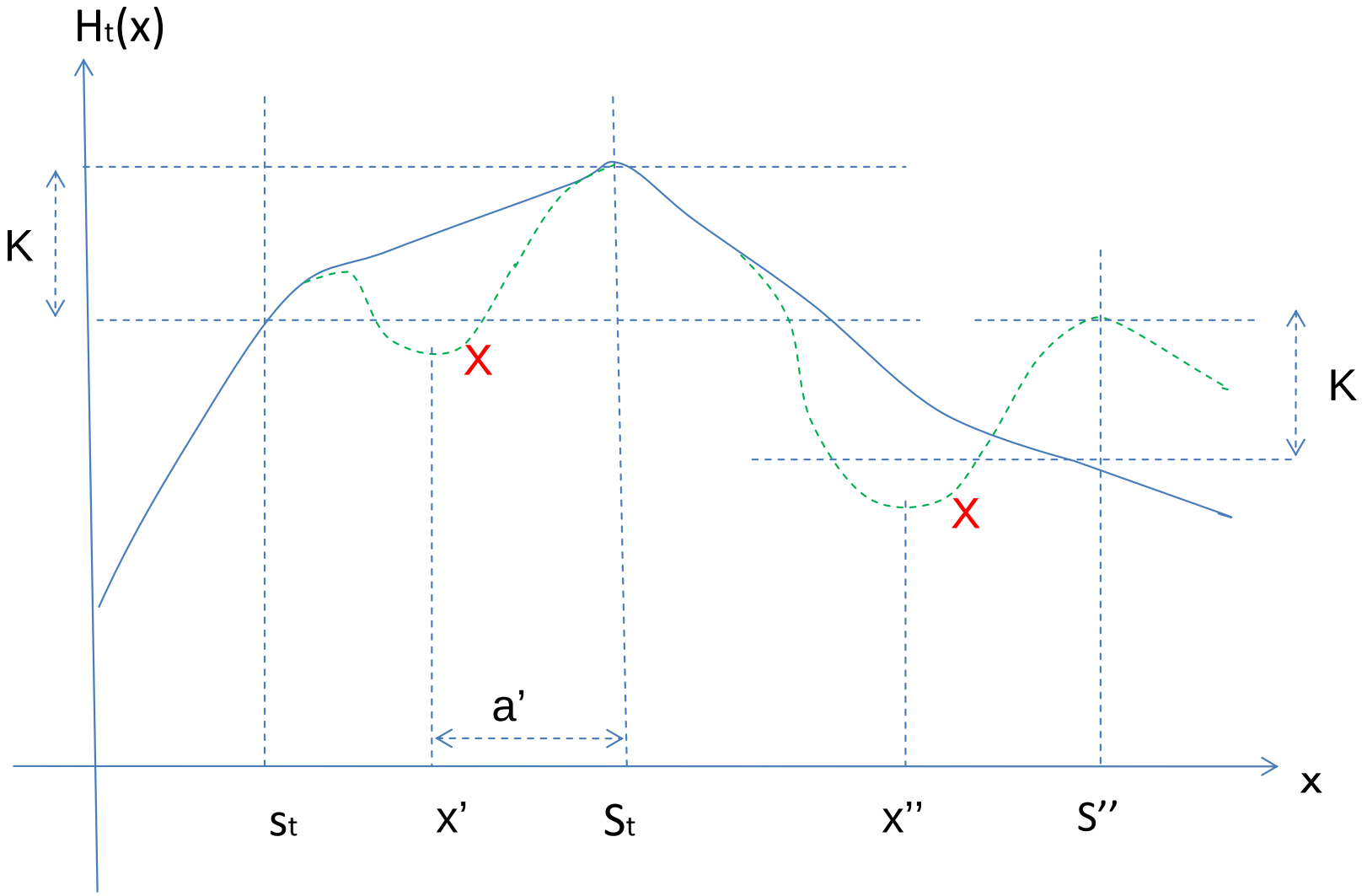
(s,S)政策: x<s_t ならばS_t-x発注，x>s_tならば発注しない政策が最適．

(Scarf (1960)他）

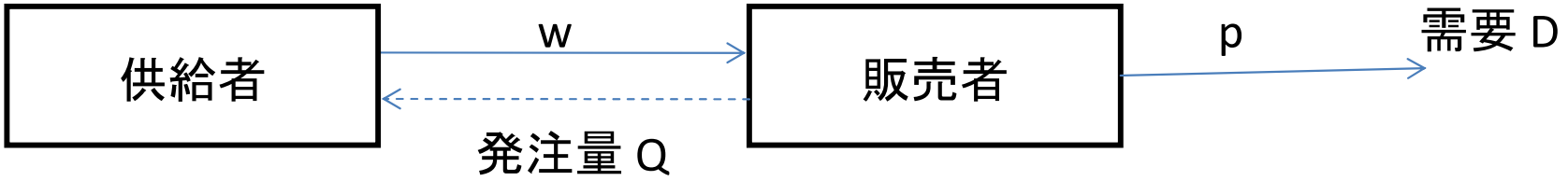
$H_t(x)$のK-凹性(-$H_t(x)$のK-凸性）

$$H_t(x) + aH_t'(x) \geq H_t(a+x) - K \quad \text{for all } a \geq 0.$$

$$(-H_t(x) - aH_t'(x) \leq -H_t(a+x) + K \quad \text{for all } a \geq 0)$$



２段階サプライチェインモデル(1期間問題）



Wholesale price Model

p: 販売価格

w: 卸売り価格

f(x): 需要密度関数 （分布関数F(x)） $L \le x \le U$上で$f(x)>0$

v: salvage 価格（売れ残りに対する処理売上：販売者に対する）

g: 品切れに対する損失費用

c: 製品原価(供給者）

仮定 $p \ge w > c > 0$, $w > v$, $c > v$, $g \ge 0$.

販売者はw,p,需要分布を元に自己の利益を最大にする発注量を決定する.

供給者は販売者がこの発注量をするという前提で，自己の利益最大になるように卸売価格wを決定したい.

販売者の期待利益

$$\Pi_r(w,Q) = (p+g-v)S(Q) - (w-v)Q - gE[D]$$

$$Q^*(w) = F^{-1}\left(\frac{p+g-w}{p+g-v}\right)$$

$$w = p+g-(p+g-v)F(Q^*(w))$$ wとQは1対1対応

供給者の期待利益

$$\Pi_s(w) = (w-c)Q^*(w)$$

$$\Pi_s(Q) = (p+g-(p+g-v)F(Q)-c)Q = ((p+g-v)(1-F(Q))+(v-c))Q$$

$$\Pi_s'(Q) = (p+g-v)(1-F(Q))+v-c+(p+g-v)(-f(Q))Q$$

$$= (p+g-v)(1-F(Q))\left(1-\frac{Qf(Q)}{1-F(Q)}\right)+v-c$$

$\frac{xf(x)}{1-F(x)}$: F(x)のGeneralized Failure Rate(GFR)

F(x)がIGFR(Increasing GFR)ならば, $\Pi_s'(Q)$ は単調減少.

→ 単峰性（Lariviere and Porteus(2001))

全体最適

$$\Pi_I(Q) = (p+g-v)S(Q) - (c-v)Q - gE[D]$$ 卸売価格に依存しない.

$$Q_I^* = F^{-1}\left(\frac{p+g-c}{p+g-v}\right)$$

例 $$F(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad (a < x < b)$$

$$Q_I^* = a + (b-a)\left(\frac{p+g-c}{p+g-v}\right)$$

$$(p+g-v)\left(1-\frac{Q-a}{b-a}\right)+v-c+(p+g-v)\frac{-Q}{b-a}=0$$

$$Q_s^* = \frac{1}{2}\left(b+\frac{b-a}{p+g-v}(v-c)\right)=\frac{1}{2}a+\frac{b-a}{2}\left(\frac{p+g-c}{p+g-v}\right)=\frac{1}{2}Q_I^*$$

Double marginalization: 各々が自己の利益を最大にするように行動すると全体最適でなくなる.

a=0,g=0→ $$\Pi_I(Q_s^*) = \frac{3}{4}\Pi_I(Q_I^*)$$

需要が販売価格により変動する場合

p: 販売価格
w: 仕入れ価格
v: salvage 価格（売れ残りに対する処理売上）
g: 品切れに対する損失費用

仮定　$p>w>0$, $w>v$, $g\geq 0$.

需要D(p):　販売価格により需要分布が異なる.

利益最大になるように仕入れ量Qと販売価格pを決定したい.

需要と販売価格の関係

D(p)=d(p) ε : 乗法型

D(p)=d(p)+ ε : 加法型

ε : 変動部分を表す確率変数,
F(x)=P($\varepsilon \leq$ x)

d(p): 需要関数

Iso-elastic

$$d(p) = ap^{-k} \qquad (a > 0, k > 1)$$

Linear-power

$$d(p) = (a - kp)^{\gamma} \qquad (a > 0, k > 0, \gamma > 0, 0 < p < a/k)$$

Exponential

$$d(p) = ae^{-kp} \qquad (a > 0, k > 0)$$

1期間問題

例：乗法型

$$\Pi_r(p,Q) = (p+g-v)S(p,Q) - (w-v)Q - gE[D(p)]$$

$$z = \frac{Q}{d(p)}: \text{ Stocking Factor, } (p,Q) \to (p,z)$$

$$S(p,Q) = E[\min(Q, d(p)\varepsilon)] = d(p)E[\min(z,\varepsilon)] \to d(p)S(z)$$

$$\Pi_r(p,z) = (p+g-v)d(p)S(z) - (w-v)d(p)z - gE[d(p)\varepsilon]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Pi_r(p,z) = d(p)\Big((p+g-v)(1-F(z)) - (w-v)\Big) = 0$$

価格依存で無いときと同様の式.

価格pが与えられたときの最適なz　$z^*(p) = F^{-1}\left(\frac{p+g-w}{p+g-v}\right)$

$$\Pi_r(p) = \Pi_r(p, z^*(p))$$
$$\Pi_r(z) = \Pi_r(p^*(z), z)$$

→ しかし単峰性の証明は簡単ではない.
条件も必要.

Petruzzi and Dada(1999) 統一的なアプローチ

発注費用を持つ場合

(例） Song, Ray and Boyaci(2009)
乗算型モデル
条件　d(p)について

正，単調減少.
$\lim_{p \to p^U} pd(p) = 0$,　$\eta(p) = -p\dfrac{d'(p)}{d(p)}$ is increasing

$\dfrac{p}{\eta(p)}$ is monotone, convex,　$p(1-\dfrac{1}{\eta(p)})$ is strictly increasing.

F(x)はIGFR

(s,S,P)政策が最適
x<s以下ならS-x発注，x>sなら発注しない.
販売価格は発注後の在庫レベルyが与えられたときの最適価格P(y)とする.

$$\eta(p) = -p\frac{d'(p)}{d(p)}$$: elasticity(弾力性）

・g(p)=pd(p): 価格pのときの売り上げ高

g’(p)=d(p)(1-η(p))

η(p)がpに関して増加するならば，η(p)が1に近いとき売り上げ高が高くなる.

・η(p)=0: 価格が変動しても需要一定(inelastic)

・|η(p)|大：価格pに対して需要が急激に変化(too elastic)
100円を自分の通帳につけるのに101円払うことはないが,
99円でよいなら誰でも払う.

多期間問題

様々なモデルで証明(乗法型，加法型, lost sale, backlog etc.)
Chen and Simchi-Levi(2004)，Huh and Janakiraman(2008)
Song, Ray, Boyaci(2009)

時刻t，在庫量xから開始したときの時刻Tまでの最大総期待利得

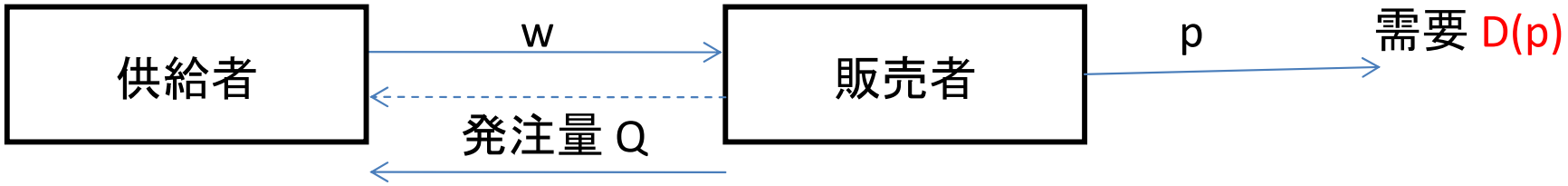
$$h_t(x) = \max_{(p,y(\geq x))} \{G(y,p) - K\delta(y-x) + wx + \int_0^\infty h_{t+1}([y - d(p)z]^+) f(z)dz\}$$

$p_t(y)$: yが与えられたときの右辺最大とするp，右辺の{}の中 $H_t(y,p)$
S_t: $H_t(y,p_t(y))$最大とするy, s_t: $H_t(y,p_t(y)) < H_t(y,p_t(y))-K$をみたす最大のx($<S_t$)

有限時間期待利得最大化
(s,S,p,A)政策が最適
$x_t<s_t$のときはS_tまで発注，価格$p_t(S_t)$
$s_t<x<S_t$のとき，もし発注するのであればS_tまで発注，価格$p_t(S_t)$とするのが最適
それ以外は発注しない．価格は$p_t(x_t)$　A: $s_t<x<S_t$内で発注する範囲

平均期待利得最大化　(加法型では有限期間期待利得についても)
(s,S,p)政策が最適
x>Sならば何もしない．
x<sならば，S-sだけ発注する．
そのときの価格は注文到着後の在庫水準y に関する最適価格p*(y)で決定．

２段階サプライチェイン問題



Buyback Model

p: 販売価格

w: 卸売り価格

D(p)=d(p) ε　（ ε の分布関数F(x))

b: 買い戻し価格（売れ残りは供給者に返す．）

g: 品切れに対する損失費用

c: 製品原価(供給者）

仮定　p>w>c>0, w>b, g≥0.

販売者はw,b,需要分布を元に自己の利益を最大にする発注量と販売価格を決定する.

供給者は販売者がこの発注量をするという前提で，自己の利益最大になるように卸売価格wと買い戻し価格bを決定したい.

Song, Ray and Li(2008)

先ほど示した（Song, Ray and Boyaci(2009)）仮定の下で,
w,bが与えられたとき,
yを固定したときの販売者期待利益はpについて単峰.
販売者期待利益を最大にする（p, y）が唯一存在.

$$\begin{pmatrix} w \\ b \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\eta(p)} F\left(\frac{y}{d(p)}\right) V\left(\frac{y}{d(p)}\right) \\ 1 - \frac{1}{\eta(p)} V\left(\frac{y}{d(p)}\right) \end{pmatrix}$$

$$V(z) = \left(1 - \frac{z(1-F(z))}{1-\Theta(z)}\right)^{-1}, \quad \Theta(z) = E[[\varepsilon - z]^+]$$

$$\pi_s(w,b) \to \pi_s(p,y)$$

定理　前記条件のもとで，yが与えられたとき生産者の期待利益$\pi_s(p,y)$を
を最大にする唯一の販売価格p(y)が存在する.
$\pi_s(p(y),y)$ を最大にする唯一のyが存在する.

モデルの拡張

リードタイムを持つ場合

多品種，ロット発注

複数の販売者が競合を持つ.

発注量と販売価格の決定時期が異なる.

参考文献

Chen, X. Simchi-Levi, D. Coordinating Inventory Control and Pricing Strategies with Random Demand and Fixed Ordering Cost: The Finite Horizon Case, Operations Research 52(2004) 887-896

Huh, W. T., Janakiraman, G. (s,S) Optimality in Joint Inventory-Pricing Control: An Alternate Approach, Operations Research 56(2008) 783-790

Lariviere, M. A. and Porteus, E. L. Selling to the Newsvendor: An Analysis of Price-Only Contracts, Manufacturing and Service Operations Management 3(2001) 293-305

Petruzzi, N.C. and Dada, M. Pricing and the Newsvendor Problem: A Review with Extensions, Operations Research 47(1999) 183-194

Scarf, H. The Optimality of (S,s) Policies in the Dynamic Inventory Problem, Proc. Of 1st Stanford Symposium on Mathematical Methods in the Social Sciences(1960), Stanford University Press, 196-202.

Song, Y., Ray, S. Boyaci, T. Optimal Dynamic Joint Inventory-Pricing Control for Multiplicative Demand with Fixed Order Costs and Lost Sales, Operations Research 57(2009) 245-250

Song, Y., Ray, S. Li, S. Structural Properties of Buyback Contracts for Price-Setting Newsvendors, Manufacturing and Service Operations Management 10(2008) 1-18

de Kok, A. G., Graves, S.C. Eds. Supply Chain Management: Design Coordination ad Operation, Elsevier (2003) (翻訳：サプライチェーンハンドブック，黒田充・大野勝久監訳，朝倉書店（2008))