待ち行列理論と極限

宮沢政清

東京理科大学 理工学部 2008年6月

最近の待ち行列理論の動向

待ち行列理論に関する最近の論文には

- 時間や空間の縮約による極限過程
 - ⇒ 流体近似,拡散近似,Halfin-Whitt regime
 - ⇒ 最適制御への応用(次元の崩壊など)
- 稀少事象の漸近特性
 - ⇒ 大偏差値理論,分布の裾の減少率

など極限を扱うもの(極限解析)が多い。大きな理由は,

モデルが複雑化 → 解析可能な理論的特性を求める

ではないだろうか. 実際,極限は不変量であり,特性を求めるための方程式が解析的に魅力あることが多い. これは,「モデルが複雑化 ⇒ 直感的な近似」と異なり,理論的に発展性がある.

極限解析の長所と短所

極限解析の利点は

- 極限量を求めることが比較的に容易
- 理論的に極限量の解釈が可能
- 数学理論として一般化や抽象化への発展性
- 一方、不利な点は
 - 極限により特殊な状況に落ちる場合がある.
 - 数学的な枠組みを理解する必要がある.
 - ⇒ 位相・測度・代数などに関する基本的な用語を知らないと理解できないことが多い.

この2番目の点が「極限解析」は難しいという誤解を生んでいる. 基礎理論は学ぶことで習得できる.

分布の裾の減少率

極限解析の例として、分布の裾の減少率を説明する. 非負整数の集合 \mathbb{Z}_+ 上の確率分布 $F = \{f_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ に対して、

$$f_*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \qquad z \in \mathbb{R}$$
 (実数全体)

により、母関数 f_* を定義する. f_* の収束半径 $R(f_*)$ を

$$R(f_*) = \sup\{z \ge 0; f_*(z) < \infty\}$$

により定義する. Cauchy-Hadamard の定理より

$$R(f_*) = \limsup_{n \to \infty} f_n^{-\frac{1}{n}} \quad (\ge 1),$$

であるから,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log f_n = -\log R(f_*)$$

すなわち、 $e^{-\log R(f_*)}$ は減少率の上限を与える.

厳密な減少率

分布 $F = \{f_n\}$ の裾を

$$\overline{f}_n = \sum_{\ell=n} f_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

と表す。 先の対数的減少率は次の厳密な減少率に精密化される。

$$\lim_{n \to \infty} a(n)^{-1} \overline{f}_n = c$$

ここに、cは正の定数であり、a(n)の例には

- $a(n) = r^n$:幾何型(指数型)
- $a(n) = n^{-\beta}, \beta > 0$:パレート型
- $a(n) = n^{-\beta}r^n$:混合型
- $a(n) = n^{-\beta} r^{n^{\gamma}}, \ \gamma > 0$:特殊型

などがある. 幾何型の場合には、 f_n も同じ減少率rをもつ.

減少率問題母関数 f* が既知で式は既知であるが • Fの具体的な

母関数 f_* が既知であればよいが、応用では F を求める方程式は既知であるが、

- Fの具体的な形がわからない,または,非常に複雑であることが多い. 例えば, Fが
 - (a) 再生方程式 $F = F_0 + F * G$ の解
- (b) 多次元マルコフ過程の定常分布の周辺分布 の場合である。ここに、G は \mathbb{Z}_+ 上の不完全な分布関数(す なわち、 $G(+\infty) < 1$)とする。
 - (a) ⇒ 比較的に容易
 - (b) \rightarrow 一般に難しい. 特に, 3 次元以上の場合はほとんど解明されていない. 今後, 大きな発展が期待される!

Fが再生方程式の解である場合I

この場合は比較的に容易であるが、方法論的に示唆に富む. F_0 の母関数を f_{0*} , G の母関数を g_* とすれば、

$$f_*(z) = \frac{f_{0*}(z)}{1 - g_*(z)}$$

である. よって, $\alpha = \sup\{z; g_*(z) \leq 1\}$ とおくと,

$$R(f_*) = \alpha$$

である. 一般に $g_*(z)$ の $z \uparrow \alpha$ での振る舞いによって,厳密な減少率は異なる. 以下では, $\alpha > 1$ (軽い裾) かつ $g_*(\alpha) = 1$ の場合について考える. 再生方程式を

$$\alpha^{n} f_{n} = \alpha^{n} f_{0n} + \sum_{\ell=0}^{n} \alpha^{n-\ell} f_{n-\ell} \alpha^{\ell} g_{\ell}, \quad n = 0, 1, \dots$$
 (1)

と書き直すと、 $\{\alpha^n g_n\}$ は確率分布であるから、再生定理が適用できる。 $\{g_n\} \Rightarrow \{\alpha^n g_n\}$ を測度変換と呼ぶ。

Fが再生方程式の解である場合 II

(1) と再生定理より、 $\{n \in \mathbb{Z}; g_n > 0\}$ の最大公約数が 1 かつ $f_{0*}(\alpha) < \infty$ ならば、 $r = \alpha^{-1}$ とおくと、

$$\lim_{n \to \infty} r^{-n} f_n = \frac{f_{0*}(\alpha)}{g'_*(\alpha)} \tag{2}$$

この結果はいろいろと拡張されている. 例えば,

- f_n, f_{0n} を有限次元ベクトル $\boldsymbol{f}_n, \boldsymbol{f}_{0n}$,
- g_n を同じ次元の正方行列 G_n

で置き換え、 $f_*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n$, $G_*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n G_n$ とするとき、 $f_*(1) = 1$, $G_*(1)$ 1 \leq 1 を満たすとする.このとき

$$\alpha^n \boldsymbol{f}_n = \alpha^n \boldsymbol{f}_{0n} + \sum_{\ell=0}^n \alpha^{n-\ell} \boldsymbol{f}_{n-\ell} \alpha^{\ell} G_{\ell}, \quad n = 0, 1, \dots$$
 (3)

が成り立ち、 $xG_*(\alpha) = x$ を満たす $\alpha > 1$ と正の行ベクトルx があるならば、1次元の場合と同様な結果が得られる.