$GI/G/\infty$ はサービス時間分布に感応する

町原　文明　　東京電機大学　理工学部

到着過程がポアソンで無限のサーバ数をもつ待ち行列システム $M/G/\infty$ における系内客数の定常分布が、サービス時間の鈍感性 (Insensitivity) という特異な性質をもつことは夙に知られている。つまり、その定常分布は $M/M/\infty$ のそれに等しく、ポアソン分布となる。鈍感性が成立するには、系内客数過程が可逆となることが必要である。元の過程 (順過程) における客の到着は時間軸を逆にたどった逆過程においては退去となるが、可逆性は到着過程と退去過程を確率的に等価にする。この等価性により鈍感性が導かれる訳である。可逆性の成立には到着のポアソン性が必要であり、$GI/G/\infty$ においては到着がポアソンでない限り、その鈍感性が雲散霧消する。どこへいってしまうのかを確率的順序付けにより明らかにしたい。

2 つの確率変数間の確率的順序付けのためにはいくつかの概念があるが、特にそれらの中で、より変動が大きい (more variable)、というものを考える。確率変数 X が確率変数 Y より変動が大きい ($X \geq_v Y$ と書く) とは、すべての増加凸関数 $h(x)$ に対して $E[h(X)] \geq E[h(Y)]$ が成立ことである。それぞれの平均が等しい超指数確率変数 H、指数確率変数 M、ガンマ確率変数 Γ, 一定時間 D を確率比較すると $H \geq_v M \geq_v \Gamma \geq_v D$ となる。

通信ネットワークの性能評価の分野では、ポアソン到着より変動が大きい故にシステムの性能に深刻な影響を与える到着をバースト到着というが、ここではそれを団塊到着といいかえる。団塊到着とは逆に、ポアソン到着より変動の小さい到着を平滑 (smooth) 到着とよぶ。以下、到着過程がポアソン到着から団塊到着、あるいは平滑到着に変わるとサービス分布がどのように影響を与え始めるかについて、$GI/G/\infty$ の世界の中で考察する。初めに、団塊到着 (超指数間隔到着) をもつ $H/G/\infty$ に対してサービス時間の変動を小さいほうから D、Γ、M、H の順に大きくしたときに系内客数の変動がどうなるかをみてみよう。まず、$H/D/\infty$ を考える。客の到着時点を一定のサービス時間ずらすと退去時点になり、退去過程は到着過程に等しくなる。到着の団塊特性は退去にそのまま遺伝する。団塊到着により系内客数が急激に増加するが、一定時間たつと団塊退去が起り、今度は逆に系内客数が急激に減少し、その結果、系内客数が大きく変動することになる。一方、サービス時間が確率的に変動する場合には退去の団塊度が和らぐ。退去過程は平滑化され、到着過程とは異なり緩やかなものとなり、系内客数の変動は小さくなる。この平滑効果は D サービス、Γ サービス、M サービス、H サービスとより変動が大きくなるにつれて顕著なものとなる。その結果、$GI/G/\infty$ の定常状態における系内客数の確率変数を $X_{GI,G}$ と書くと、$X_{H,D} \geq_v X_{H,\Gamma} \geq_v X_{H,M} \geq_v X_{H,H} \geq_v X_{M,G}$ という確率不等式が成立することになる。ここで、サービス時間が重い裾野 (heavy tail) をもつ場合には、$X_{H,H}$ と $X_{M,G}$ が確率的に等しくなるという予想をしておく。以上の考察より、$H/G/\infty$ の中で $H/D/\infty$ が最大の系内客数の変動をもち、システム性能上最悪なものとなることがわかる。ここで一つの教訓 (冗談)。気分が躁状態にあるときには次々と課題を与える一方で、鬱中にはそれを全く出さない気紛れな教員にどう対処すればいいか？次々と与えれる課題にいちいち真面目に対応して〆切までに完璧に仕上げる努力をすると、脳内システムは $H/D/\infty$ の様相を呈して脳内を並列して走る課題の数が大きく変動する。脳

内システムの性能低下は免れ得ない。気紛れには気紛れ、処理 (サービス) 時間の変動を大きくさせて脳内を $H/H(heavy\ tail)/\infty$ にもっていけばいいだろう。

それでは逆に平滑到着をもつ $\Gamma/G/\infty$ の場合, 鈍感性はどこへ行くのであろうか。団塊到着の場合とは逆に $X_{\Gamma,D} \le_v X_{\Gamma,\Gamma} \le_v X_{\Gamma,M} \le_v X_{\Gamma,H} \le_v X_{M,G}$ という不等式が成立するはずである。きちんと定期的に課題を出す教員に対してはきちんと対応するのがよい。

システムの良し悪しを判断するには、システムごとの性能を定量的に評価するというより、システム間の確率的な比較のほうが重要視されるようになってきているような気がする (勿論、システム設備数の算出においては定量的な評価が必須であり、新しい性能評価式を見出すことの意味が薄れた訳ではないけれども)。確率比較を使ってシステムを定性的に比較することができれば、本来 OR 研究者がたつべきコンサルタントとしての立場が高まるに違いない。$GI/G/\infty$ の性能比較についてざっと述べてきたが、筆者のいい加減な直感による部分が多い。若い読者の皆さんが、この直感の正否に興味をもたれるなら幸いである。待ちのあるシステム $GI/G/S$ に対しては、述べてきたことが全く成り立たないことを付記する。この問題に対する若い皆様のチャレンジを期待する。