

待ち行列分析における シミュレーション技法

逆瀬川浩孝

早稲田大学理工学部

日本OR学会待ち行列部会 2006/6/17

待ち行列分析とシミュレーション

■ モデルの開発

- モデルの特性の理解、解析的方法への橋渡し
- 解析的結果の追試（確認）
- 頑健性（不感性）、仮定の緩和

■ 現実問題への適用

- 現場の要請（シミュレーション資料がなければ入札不可）
- シナリオ想定型
- 最適設計問題

シミュレーションの仕組み

■ モデリング

- システムと環境、何でも取り込めばよい、というものでもない
- 要因間の関連性、分析に必要な適度の結びつき
- ダイナミックな構造の記述

■ ランダム事象生成

- データ収集、分布の同定、パラメータの推定
- ランダムデータの生成アルゴリズム

■ スケジューラ

■ 統計情報、結果の分析

- アニメーション

➔ シミュレータ

シミュレータ

- 生産システム
 - Arena, Witness, Visual SLAM, [Simul8](#), ...
- ネットワークシミュレータ
 - ns-2
 - OPNET (NTT-AT)
 - QualNet (Scalable Network Tech.)
 - GloMoSim (UCLA)
- 交通工学

待ち行列網のシミュレーション

■ プログラムの中身

- 滞在客の属性リスト
- 各ノードの待ち行列リスト、サーバリスト
- 統計表
- 事象時刻管理表
 - 次の客の到着時刻（すべての入力過程について）、
 - 現在サービス中のノードの終了時刻、
 - その他、将来予定されているランダム事象の生起時刻を時刻順に並べたもの

待ち行列網のシミュレーション(続)

- 事象時刻管理表の順番に事象を処理して行く
 - 「到着」事象ならば、
 - 次の到着時刻を「管理表」に追加、
 - 到着客の属性を生成、
 - 到着ノードに到着客の情報を追加、あるいは呼損処理
 - 「サービス終了」ならば、
 - 退去客の行く先のノード状態によって、適切な処理を決める
 - すぐにサービス開始ならば、管理表にサービス完了時刻を登録
 - 退去ならば、滞在客のリストから消去
 - 待ち客がいれば新規サービスを開始し、管理表にサービス完了時刻を登録
 - ブロッキング解消など、他ノードへの波及効果を調べる

ランダムデータの生成

日本OR学会待ち行列部会 2006/6/17

ランダムデータの生成、擬似一様乱数

- 乱数とは、確率変数の実現値系列
 - 与えられた数列が乱数であるかどうかを決めることができない
- 擬似乱数とは、次の性質を満たす規則的数列（周期列）
 - 周期が長く、
 - 可能な限り、数論的に良質で（多次元均等分布）
 - 統計的な検定に合格する
- 真の擬似乱数？！
 - どの統計的検定を通せばよいか？

擬似一様乱数の生成アルゴリズム

■ 乗算合同法

$$x_n = ax_{n-1} + c \pmod{P}$$

- 簡便な生成法
- 周期は 2^{32} 、あるいは 2^{48} が多い
- 粗結晶構造がある

■ GFSR系列

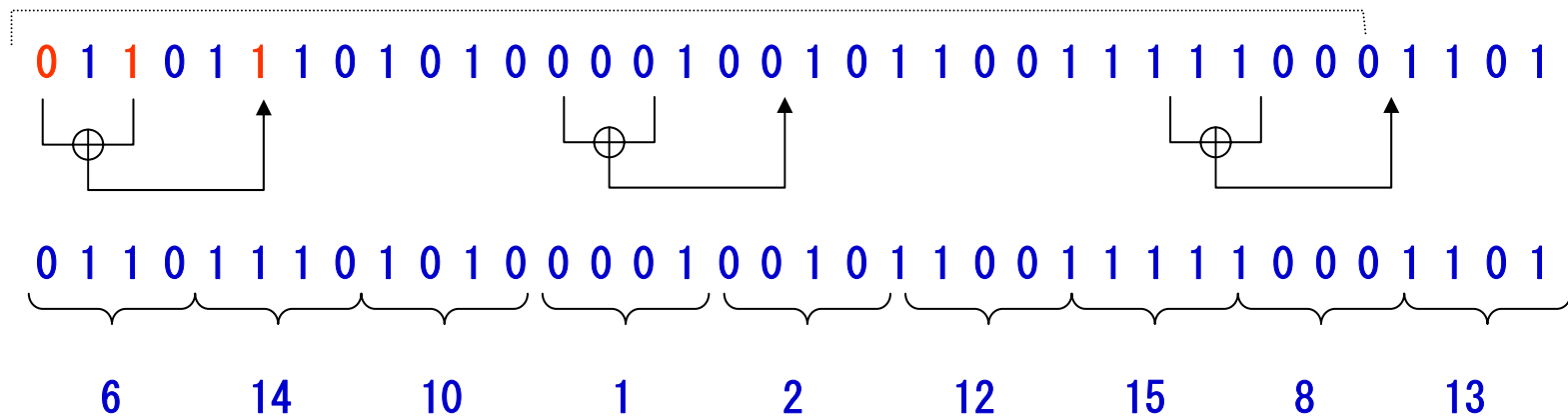
- $x^q + x^p + 1$ はGF(2)上の原始多項式 ($q > p$)

$$x_n = x_{n-p} + x_{n-q} \pmod{2}$$

- 周期は $2^q - 1$

GFSR乱数の例

- 原始多項式： $x_n = x_{n-3} + x_{n-5}$
 - 周期は 31

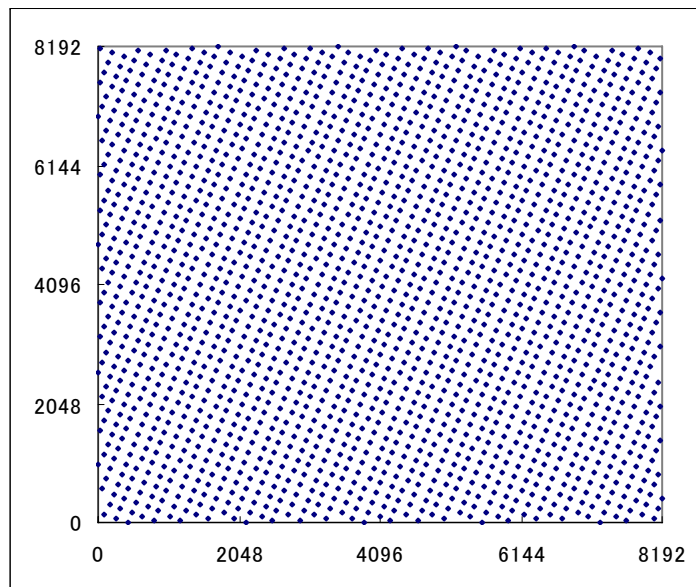


1 から 15 までの数が2回ずつ、0 が1回、周期 31 で循環する
(散布図)

擬似乱数列の規則性

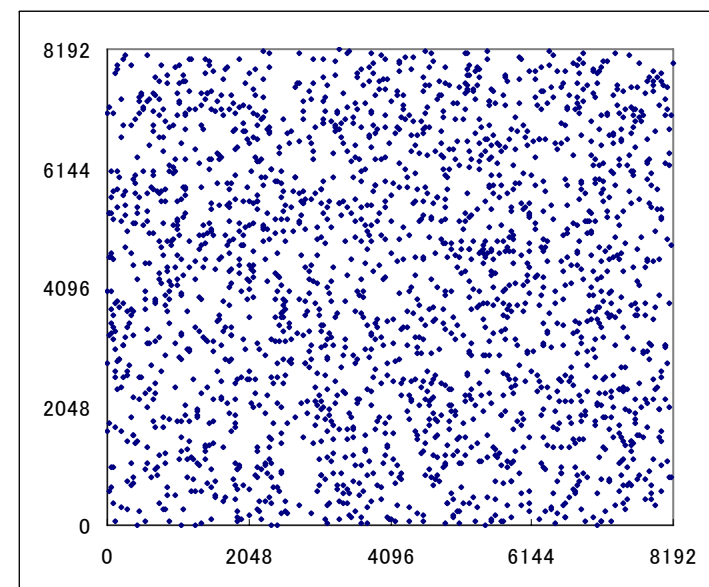
■ 2次元の散布図

乗算合同法（周期 4095）



$$x_n = 429x_{n-1} \bmod 2^{13}$$

GFSR 法もどき



$$x_n = x_{n-7} + x_{n-12} \bmod 2$$

擬似一様乱数の生成アルゴリズム(続)

■ メルセンヌツイスター

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-p} + \mathbf{x}_{n-q+1}B + \mathbf{x}_{n-q}C \pmod{2}$$

- $\mathbf{x}_n$ は2進数ベクトル、B,Cは置換行列
- ビット演算を用いた長周期数列、周期は $2^{19937}-1$
- 全周期を用いた分析では623次元まで均等分布する
- 「今までのところ」ハードな検定をパスする

- シミュレータ、あるいはプログラミング言語の乱数を使う場合には注意が必要、たとえば ...

C++ の乱数生成ルーチン

■ パレート分布に従う乱数の裾の乱れ（標準偏差の実現値）

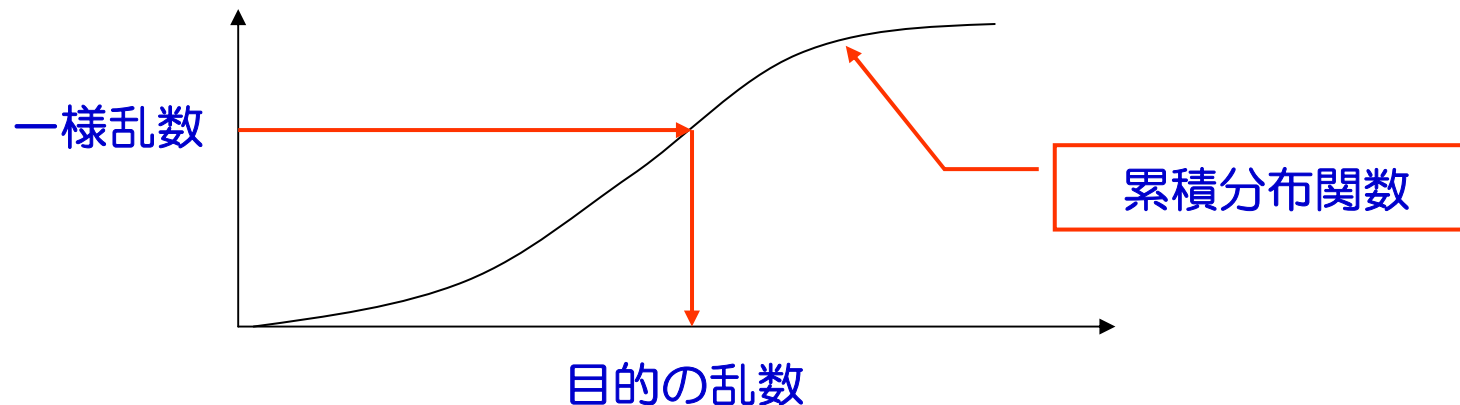
形状パラメータ	5	4	3	2.5
理論値	1.2910	1.4142	1.7321	2.2361
標本1	1.2901	1.4073	1.6810	1.9966
標本2	1.2820	1.4014	1.6685	2.0201
標本3	1.2889	1.3917	1.6680	2.0216

16ビット乱数なので、大きな値が出にくい？

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{b}\right)^{-a} \quad (x \geq 0; a, b > 0)$$

ランダムデータの生成、変換

- 特定の分布に従う乱数は一様乱数を変換して作る
- 逆関数法
 - 逆関数が容易に計算できる場合
 - 逆関数を多項式（有理関数）近似して使う場合もある(裾が問題)



逆関数法の例

■ 指数分布

$$F(x) = 1 - e^{-ax} \quad (x \geq 0; a > 0)$$

$$F^{-1}(u) = \frac{-\log(1 - u)}{a}$$

■ ワイブル分布

$$F(x) = 1 - \exp(-ax^b) \quad (x > 0, a, b > 0)$$

$$F^{-1}(u) = \left(-\frac{\log(1 - u)}{a} \right)^{1/b}$$

■ パレート分布

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{b} \right)^{-a} \quad (x \geq 0; a, b > 0)$$

$$F^{-1}(u) = \frac{b}{(1 - u)^{1/a}} - b$$

シミュレーション結果の解析

日本OR学会待ち行列部会 2006/6/17

シミュレーション結果の分析

- 条件停止型シミュレーション
 - 立ち上がり1時間の混雑度を測る
 - 同一条件下で繰り返し実験可能
 - 独立標本採取可能
- 定常状態シミュレーション
 - 安定状態にあるシステムの分析
 - 実験は特定条件でスタートしなければならない
 - いかにして、定常状態を作り出すか、が問題

条件停止型シミュレーションの分析

- 例 ピーク時間帯の平均待ち時間（エレベータ）
 - 客の到着パターンを決める
 - 決められた時間までの運行シミュレーションを行う
 - 乗客の待ち時間データを集める
 - それらの平均を計算して実験の結果とする
 - 乱数を換えて実験を繰り返し、独立標本（実験結果）を得る
 - 標本平均によって平均待ち時間を「推定」する
- 標本調査論
 - 母集団パラメータ（平均待ち時間）を独立標本から推定する

標本調査論

- 母集団から独立標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$
- 推定：標本平均値は母集団平均値に等しい

$$\bar{X} = \bar{X}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

- その根拠 1：大数の法則
 - 標本平均はサンプルを増やすと母集団平均に収束する

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(-\varepsilon < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu < \varepsilon\right) = 1 \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

- その根拠 2：不偏推定

$$E(\bar{X}) = \mu$$

大数の法則とシミュレーション

- 大数の法則：標本平均は期待値に収束する
 - 標本を十分に多く採れば標本平均は真の値に近い推定ができる
(数学的には)
- 1回のシミュレーション実験が「十分に多く」行われたかどうかは判断基準がない
 - 真の値との差、誤差を測る必要がある
推定値は真の値とどれくらい近いかな？

← 複数結果のばらつきを見て判断する

中心極限定理

- 標本平均を基準化したものは標準正規分布に収束する

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx$$

- 区間推定：十分大きなnに対して、0.95の確率で母集団平均の範囲を限定できる

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

ただし

$$\int_{z_{\alpha}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \alpha$$

中心極限定理とシミュレーションの推定

- 標準偏差を推定する必要がある

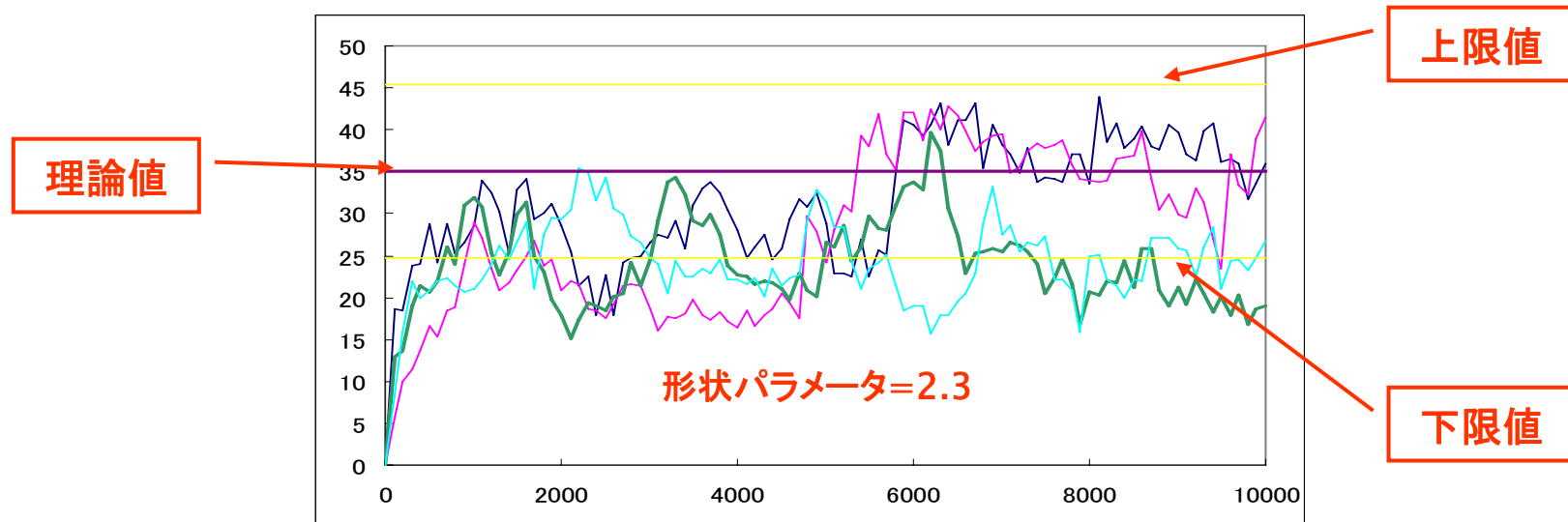
$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \quad \Rightarrow \quad \left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

- 推定の問題点：

- 標準偏差の推定が不安定
- 「収束」に関して何の保証もない（十分に多ければ...）
 - 標本の大きさ（実験の回数）はどれくらいにすればよいのか
- たとえば ...

信頼区間は「信頼」できるか

- 稀な事象によって、大きく変動する場合
 - 標準偏差の推定が怪しくなる
 - 例：M / Pareto / 1 の待ち時間（200サンプルの平均）



正規母集団の場合

- 平均 μ 分散 σ^2 の正規母集団からの標本平均は、不偏分散の平方根を使って基準化したものが **t 分布** に従う

- 区間推定： $\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}^{(n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}^{(n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$

– ただし $t_{\alpha}^{(n)}$ は自由度 n の t 分布の上側 $100(1-\alpha)$ パーセント点

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

- 多サンプルの平均ならば正規分布が仮定できる

推定精度と要求精度

■ 推定値の精度

- 信頼区間の半幅（普通は信頼度95%、2シグマ）の逆数

■ 要求精度

- 絶対誤差：平均稼働率を2%以内の精度で求める
- 相対誤差：平均待ち時間を平均値の1割以内で求める

$$z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < 0.1 \bar{X}$$

精度を決める要因

- 信頼区間の半幅は3要素で決まる

- 信頼係数 $z_{\alpha/2}$
- 標本標準偏差 S
- 標本サイズ n

$$z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} < 0.1\bar{X}$$

- 信頼係数を小さくする → 見せかけの精度保証
- 標準偏差を小さくする → モデルを変える
- 標本サイズを大きくする → 実験を増やす

要求精度を満たす実験回数

- 相対誤差 ε の精度を保証するための実験回数

$$n > \left(z_{\alpha/2} \frac{S}{\varepsilon \bar{X}} \right)^2 = \left(z_{\alpha/2} \frac{S}{\bar{X}} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon^2}$$

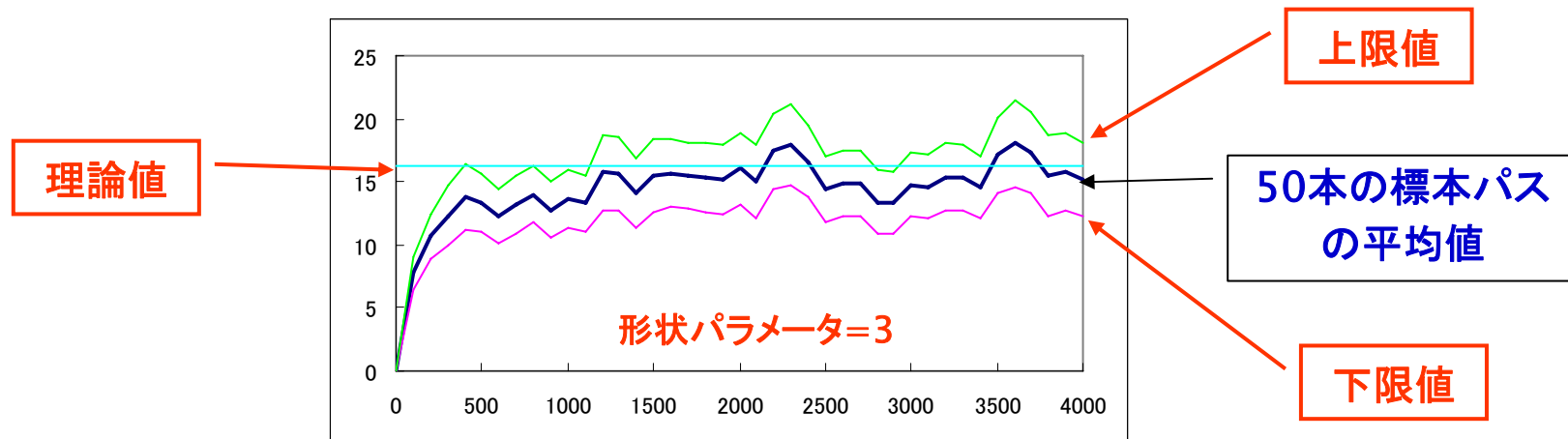
- 誤差（要求精度）の2乗に反比例する
 - 誤差を半分にしたければ、実験回数は4倍
 - 精度を1桁上げたければ、実験回数は100倍
- 実験回数 = コスト：シミュレーションは慎重に
 - いくらコンピュータの性能が上がったとしても限界が見える

効率的なシミュレーション、分散減少法

- 第2の選択肢：標準偏差を小さくする、分散減少法
 - 制御変量法
 - 対照変量法
 - 重点抽出法
 - 層別抽出法
 - 条件付き確率法

定常状態シミュレーション

- 定常状態：十分に時間が経過した後の状態
- 一時的状態
 - 立ち上げの問題：定常状態の判定条件
 - ビルドアップタイム
 - 例：裾の長い分布（M/Pareto/1の待ち時間）

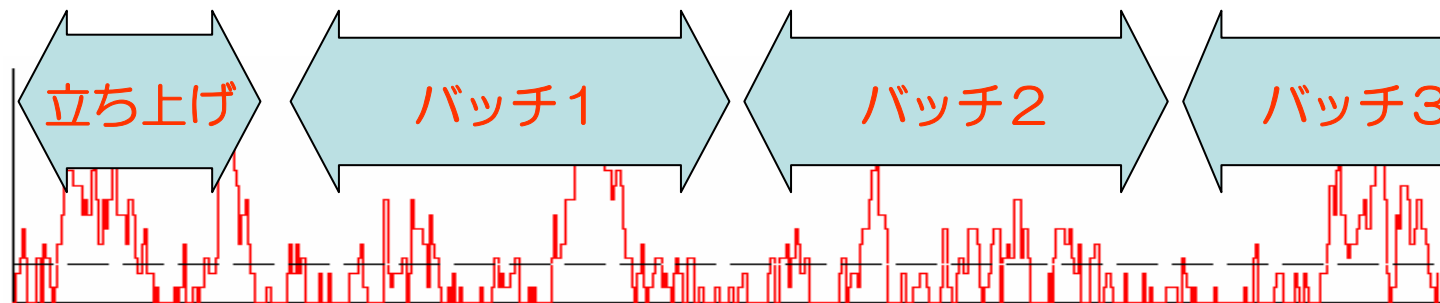


独立標本法

1. 特定の状態からシミュレーションを実行し、
立ち上げの時間を除いて、データを集計し、一つの標本値を得る
 2. 乱数を換えて同じ実験を繰り返す
 3. 得られた標本をもとに、条件停止型と同様の分析を行う
- 標本ごとに立ち上げの間のデータを捨てることになる

1回シミュレーション法

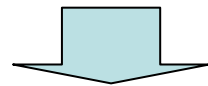
- batch(塊) means
- 例：ネットワークの滞在時間を推定する
 - 客が1000人処理されたら定常状態に達したとみなし
 - 次の2000人を処理するまでシミュレーションを実行して、2000人の平均滞在時間を計算する（バッチ1）
 - さらにシミュレーションを続行し、3001人目から5000人目までの客の平均滞在時間を計算する（バッチ2）



1回シミュレーション法（続き）

- 特定の状態からシミュレーションを実行し、
 - 立ち上げの時間を除いて、全体をn個のバッチに分け、
 - 各バッチごとにデータを集計して標本値を得る

$$\underbrace{X_1, X_2, \dots, X_n}_{\bar{Y}_1}; \underbrace{X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{2n}}_{\bar{Y}_2}; \dots; \underbrace{X_{(m-1)n+1}, \dots, X_{mn}}_{\bar{Y}_m}$$



$$\bar{Y}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{(k-1)n+i} \quad \Rightarrow \quad \bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{Y}_k$$

1回シミュレーション法（続き）

- 問題点：隣り合うバッチは互いに独立ではない

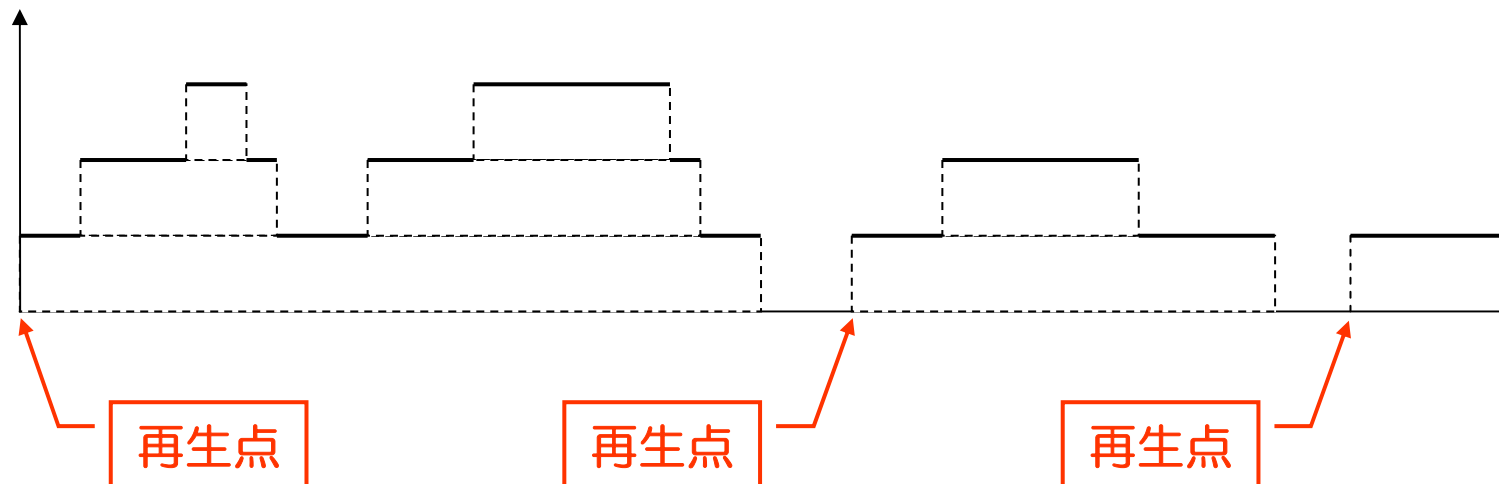
$$X_1, X_2, \dots, X_n; X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{2n}; \dots; X_{(m-1)n+1}, \dots, X_{mn}$$


- $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_m$ は独立ではない
 - バッチを十分に大きくとれば、相関を抑えることができる
 - ➔ $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_m$ を独立と見なして、通常の推定法を適用する
 - バッチの数を増やすよりは、バッチの大きさを重視
-
- 実用的指針：実験を繰り返して独立標本の数を増やすよりも、一回の実験を十分に長く取りなさい

正確な定常状態シミュレーション

- GI/GI/1モデルで、稼働期間の開始時点は、常に「再生」
- 再生過程： $\{X(t), t \geq 0\}$ と $\{X(t + \tau), t \geq 0\}$ が同じ確率規則

系内容数

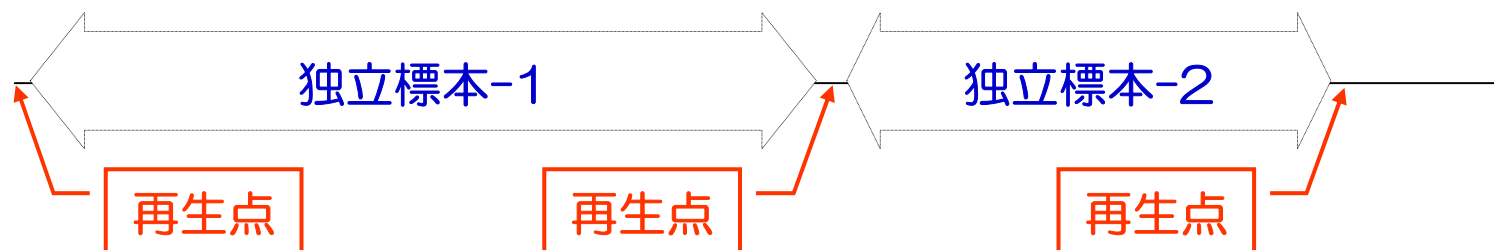


再生過程 (regenerative process)

- 定常状態の性質は1回の再生サイクルを調べれば分かる
 - $h(x)$: 実数値関数
 - T_1 : 再生点

$$\xi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t h(X(t)) dt = \frac{1}{E(T_1)} E\left(\int_0^{T_1} h(X(t)) dt\right)$$

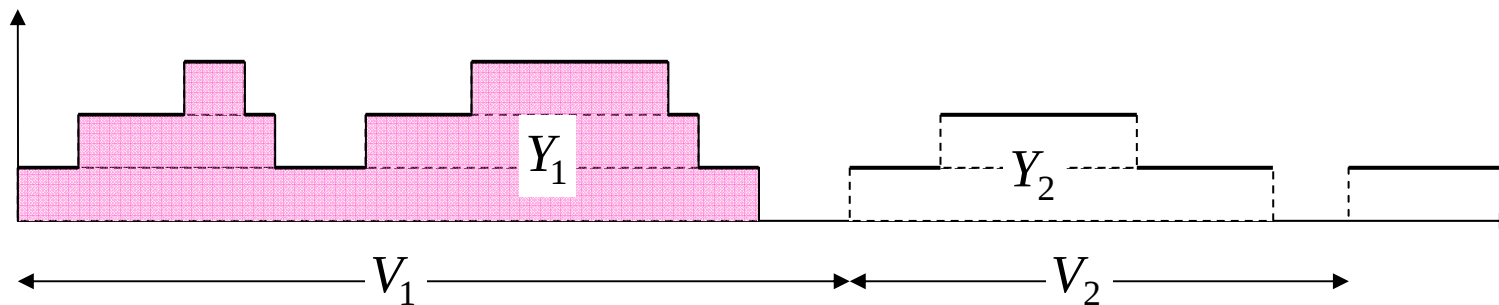
- 再生過程を利用したシミュレーション
 - 再生ごとに、集計して独立標本とする



再生過程シミュレーション

- 一つの再生サイクルから一つの標本が得られる
- 例：GI/GI/1の平均待ち客数の推定
 - $V_1, V_2, \dots, V_n$ ：再生サイクルの長さ
 - Y_k ：k再生サイクル中の延べ待ち客数
 - 推定量：

$$\hat{\xi}(n) = \frac{\bar{Y}(n)}{\bar{V}(n)} \quad \bar{Y}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k, \quad \bar{V}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n V_k$$



再生過程シミュレーション、推定精度

- データを捨てる必要がない

- $Z_k = Y_k - \xi V_k (k = 1, 2, \dots, n)$ が独立同分布

- $\bar{Z}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k$ は (nが大きければ) 正規分布に従う

- 区間推定：

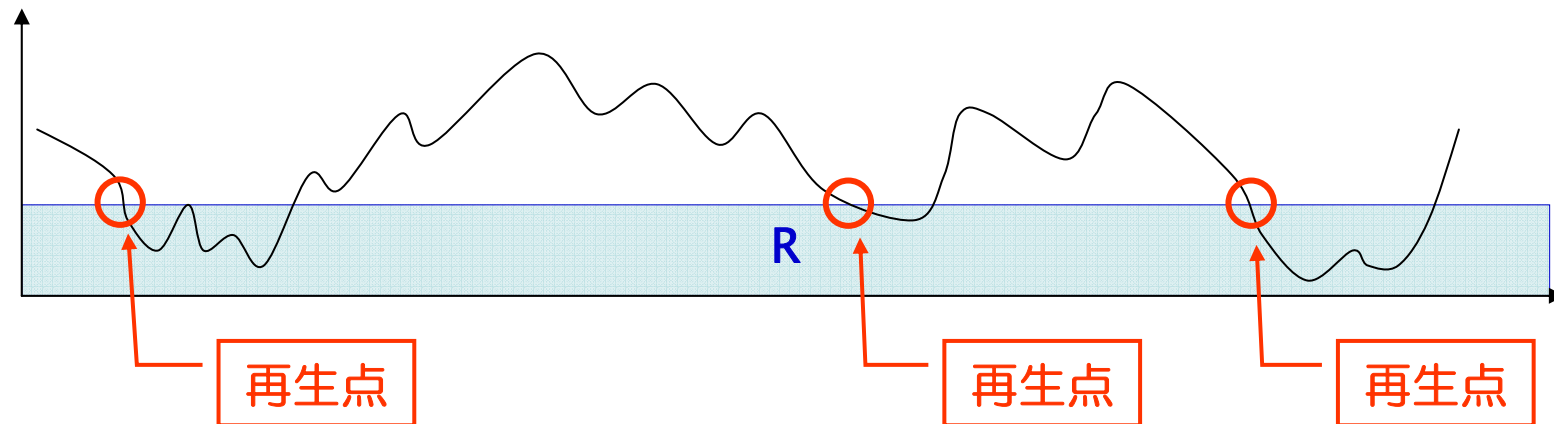
$$\left[\frac{\bar{Y}(n)}{\bar{V}(n)} - z_{\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_Z}{\bar{V}(n) \sqrt{n}}, \frac{\bar{Y}(n)}{\bar{V}(n)} + z_{\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_Z}{\bar{V}(n) \sqrt{n}} \right]$$

再生過程シミュレーション、実施

- 複雑なシステムでは再生サイクルが長い

➔ 「再生集合」 R

- R 以外の状態から R の状態へ推移したとき、再生とする
- 例：ネットワークで、ボトルネックのノードが空
- 集合 R の中での分布の情報が必要



稀な事象の生起確率の推定

日本OR学会待ち行列部会 2006/6/17

稀な事象の起きる確率を推定する

- 例
 - パケットバッファの設計（呼損を 10^{-8} 以下に抑える）
 - 高信頼システム設計
- 通常のシミュレーションでは、確率の逆数の10倍以上は実験を繰り返す必要がある
- 稀な事象が起きやすい環境を作って実験する
 - 空間を歪める
 - 確率測度を変える

➔ 重点抽出法

GI/GI/1の待ち時間の裾

■ 長待ち率

- サービス開始までに待たされる時間が、ある値以上の確率
- システム評価の重要な指標

■ GI/GI/1の待ち時間 — リンドレーの等式

$$W_{n+1} = \max(0, W_n + B_n - A_n)$$

- A_n : n 番目と $n+1$ 番目の客の到着間隔、
- B_n : n 番目の客のサービス時間、
- W_n : n 番目の客の待ち時間

$E(B - A) < 0$ のとき W_n は W に収束する

$$\xi = P(W > r)$$

GI/GI/1の待ち時間の裾（続き）

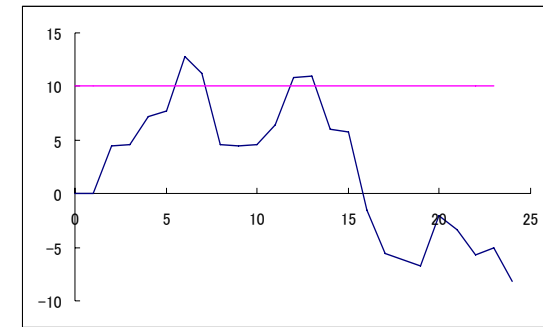
■ 待ち時間とランダムウォーク

$$W_n \sim \max(0, S_1, \dots, S_n)$$

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

$$Y_k \sim B_k - A_k$$

$W > r$ となる確率は $S_n > r$ となる S_n が存在する確率



■ シミュレーションによる推定：

- 到着間隔、サービス時間のデータを生成し、ランダムウォークの最大値を計算する

$$h(\{a_i, b_i\}) = \begin{cases} 1 & \max_{1 \leq m \leq n} \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) > a \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

GI/GI/1の待ち時間の裾、シミュレーション

■ シミュレーションによる推定：

- A,Bに従う乱数を生成する $(a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n)$
- 0,1データに変換する

$$h(\{a_i, b_i\}) = \begin{cases} 1 & \max_{1 \leq m \leq n} \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) > r \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

- 乱数を換えて実験を繰り返し、標本平均を推定値とする

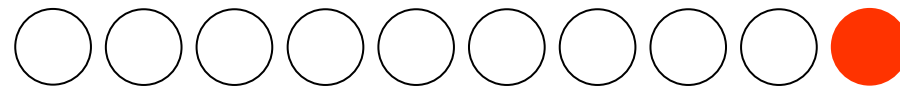
$$\hat{\xi} = \bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h_k(\{a_i, b_i\})$$

シミュレーションの問題点と解決策

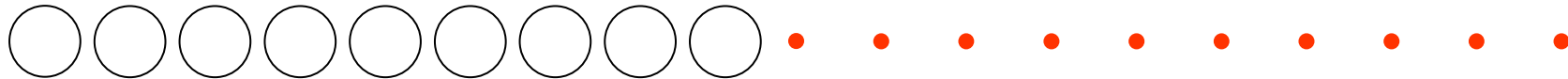
- r が大きいとき、実験結果はほとんど 0
 - 改良法：到着率を大きくすれば、待ち時間は長くなる
 - 確率測度を変える
- ➔ 重点抽出法
- 到着率とサービス率を取り替える
 - 待ち行列は発散する
 - 確実に r を超える
 - その結果をどれくらい低く評価するか？
 - 測度変換の補正

重点抽出法の原理

- 壺に 999 個の白い玉と1個の赤い玉を入れる
- 抽出実験で、赤い玉の比率を推定したい
 - 赤い玉の抽出確率は $1/1000$



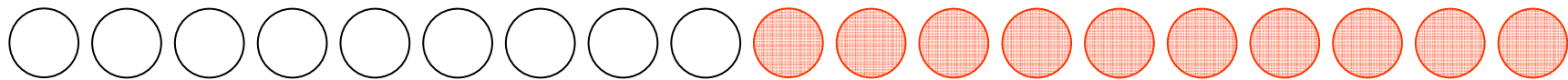
- (実験の改良) 赤い玉を 1000 分割して抽出実験する



→ 小さいと取り出されにくい
確率が計算できない

重点抽出法の原理（続き）

- 玉の大きさを揃える、
 - どの玉の抽出確率も同じ（1999 分の 1）
- その代わりに「色を薄くする」
 - ピンク玉が 1000 回取り出されたら、それを赤玉 1 回と数える



- 真の抽出確率 $\left(\frac{1}{1000000}\right) = \text{抽出確率} \left(\frac{1}{1999}\right) \times \text{補正係数}$

- 抽出実験（100 回抽出）：

0.00116, 0.00106, 0.00092, 0.00104, 0.00099, 0.00096, 0.00102, ...

稀な事象の生起確率の推定

- 例：待ち時間がサービス時間の10倍よりも長い確率？

$$\xi = P(X \in A)$$

$$= E(1_A(X)) = \int 1_A(x) f_X(x) dx$$

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

ほとんど0

- $X \in A$ という事象が稀でなくなるような空間を作る

測度変換

- $1_A(x)f(x) > 0$ ならば $g(x) > 0$ という $g(x)$ を取る

$$E(1_A(X)) = \int 1_A(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = E_g(1_A(Y) L(Y))$$

- E_g は $g(x)$ を使った期待値の意味

- 推定： $g(x)$ に従う n 個の乱数 $x_1, \dots, x_n$ を生成し

$$\hat{\xi}_{IS} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_A(x_k) L(x_k)$$

- 不偏推定

尤度比、
つまり
補正係数

最適な測度変換、推定量の分散

■ 2次モーメントを小さくしたい

$$\begin{aligned} E_g(\hat{\xi}_{IS}^2) &= \frac{1}{n} \int \left(1_A(x) \frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 g(x) dx = \frac{1}{n} \int 1_A(x) \frac{f(x)}{g(x)} f(x) dx \\ &= \frac{1}{n} E(1_A(X)L(X)) \end{aligned}$$

- A が稀ではない $\rightarrow$ Aしか起きない、というシミュレーションができれば...

$$g(x) = \frac{1}{\xi} f(x) \Rightarrow E(1_A(X)L(X)) = \xi^2 \Rightarrow V(\hat{\xi}_{IS}^2) = 0$$

- $g(x)$ をシミュレーションするのは ξ を求めるくらい大変

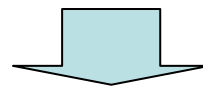
標本平均の裾、大偏差理論による評価

- 標本平均 $Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ が期待値 m 以外の値の付近に止まる確率はほとんど0（稀な事象）

$$P(Z_n \in A) = e^{-nI(a)} \quad A = [a - \delta, a + \delta] \quad (m \notin A)$$

– ただし

$$I(a) = \sup_{\theta} (\theta a - \log M(\theta)) = \theta^* a - \log M(\theta^*)$$



$$M(\theta) = E(e^{\theta X_1})$$

$$P(Z_n \in A) = \left(\frac{M(\theta^*)}{\theta^* a} \right)^n = e^{-n\theta^*(a-m)} \left(\frac{M(\theta^*)}{\theta^* m} \right)^n$$

– 収束の速さが指数的

大偏差理論に基づく指数変換

■ 測度変換

$$g(x) = \frac{e^{\theta^* x}}{M(\theta^*)} f(x)$$

— その期待値

$$E_g(X) = \frac{1}{M(\theta^*)} \int x e^{\theta^* x} f(x) dx = \frac{M'(\theta^*)}{M(\theta^*)} = a$$

— 標本平均が $a \neq m$ に近いという稀な事象は

$g(x)$ にとっては稀ではない

➔ $g(x)$ を使ってシミュレーションして、補正する

GI/GI/1の待ち時間の裾（続き）

■ 待ち時間とランダムウォーク

$$W_n \sim \max(0, S_1, \dots, S_n)$$

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad Y_k \sim B_k - A_k$$

– Y の測度変換：

$$g(x, \theta) = \frac{1}{M_{B-A}(\theta)} e^{\theta x} f_{B-A}(x)$$

– M/M/1の場合：到着分布とサービス分布を入れ替える

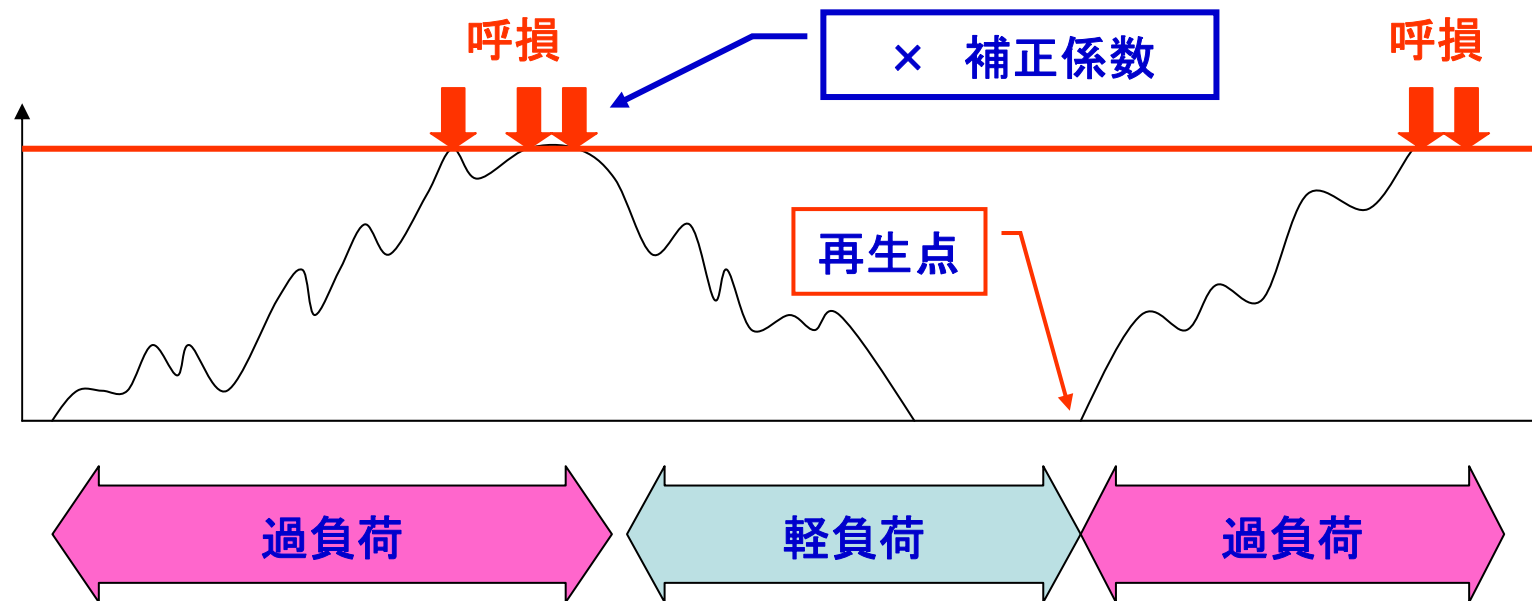
$$f_{B-A}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda|x|} & (x < 0) \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\mu x} & (x \geq 0) \end{cases} \Rightarrow e^{\theta^* x} f_{B-A}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\mu|x|} & (x < 0) \\ \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \end{cases}$$

呼損率の推定

- 呼損率：有限待ちが許される待ち行列モデルで、サービスを受けない客の割合
- 通常のシミュレーション：軽負荷ならば、長時間動かしても呼損が起きない
- 重負荷にして呼損を起きやすくする工夫が必要
 - 到着分布とサービス分布を入れ替える
 - ➔ 過負荷（トラフィック密度が1を超える）となり、推定不能
 - ➔ 過負荷と軽負荷を適宜切り替える
 - ＋ 再生過程のシミュレーション

呼損率の推定（重点抽出法）

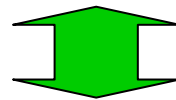
- 再生点から「過負荷」のシミュレーションを実行し、
 - 呼損を観測したら軽負荷にして再生点に戻す



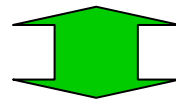
クロスエントロピー最小化測度変換

- 理想的な変換測度 $g^*(x) = \xi^{-1}f(x)$ に近い測度を探す方法
- 分布の距離（クロスエントロピー）最小化

$$\min_g E_{g^*} \left(\log \frac{g^*(X)}{g(X)} \right)$$



$$\max \int g^*(x) \log g(x) dx = \max \int \frac{I_{\{x \in A\}} f(x)}{\xi} \log g(x) dx$$



$$\max_g E_f(I_{\{X \in A\}} \log g(x)) = \max_{\theta} E_f(I_{\{X \in A\}} \log g(x; \theta))$$

クロスエントロピー最小化測度変換

$$\max_{\theta} E_f(I_{\{X \in A\}} \log g(x; \theta))$$

- $f(x)$ に従う標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ によって期待値を推定

$$\max_{\theta} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_{\{X_k \in A\}} \log f(X_k; \theta)$$

: θ に関する最適化問題 (確定的)

シミュレーションによる感度分析

■ 感度分析

- サービス率をちょっと上げたら待ち時間はどうか
- バッファを増やしたら呼損率はどうか

■ 最適化問題

- 二つの制御方式はどちらが効率的か
- あるコストの下で、サービス率をどのように配分すればよいか

■ シミュレーションは与えられた条件に対して一つの値を推定する技法

感度分析

日本OR学会待ち行列部会 2006/6/17

感度分析の定式化

■ 定式化

$$\xi = \xi(\theta) = E(h(X, \theta))$$

$$\frac{d}{d\theta}\xi(\theta) = E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}h(X, \theta)\right)?$$

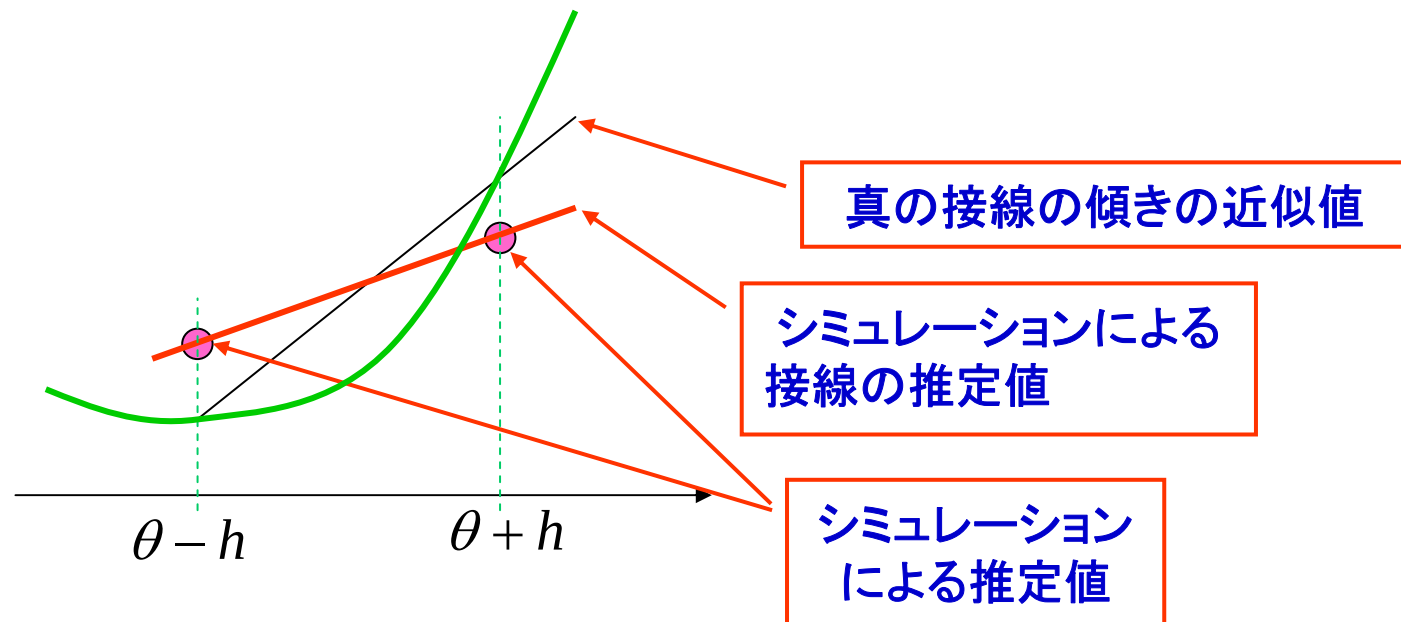
■ 一つの θ に対する関数値の「推定値」しか得られない

– 導関数の推定には2点の推定値が必要

$$\widehat{\xi'(\theta)} = \frac{\hat{\xi}(\theta + h) - \hat{\xi}(\theta)}{h} \quad \text{または} \quad \widehat{\xi'(\theta)} = \frac{\hat{\xi}(\theta + h) - \hat{\xi}(\theta - h)}{2h}$$

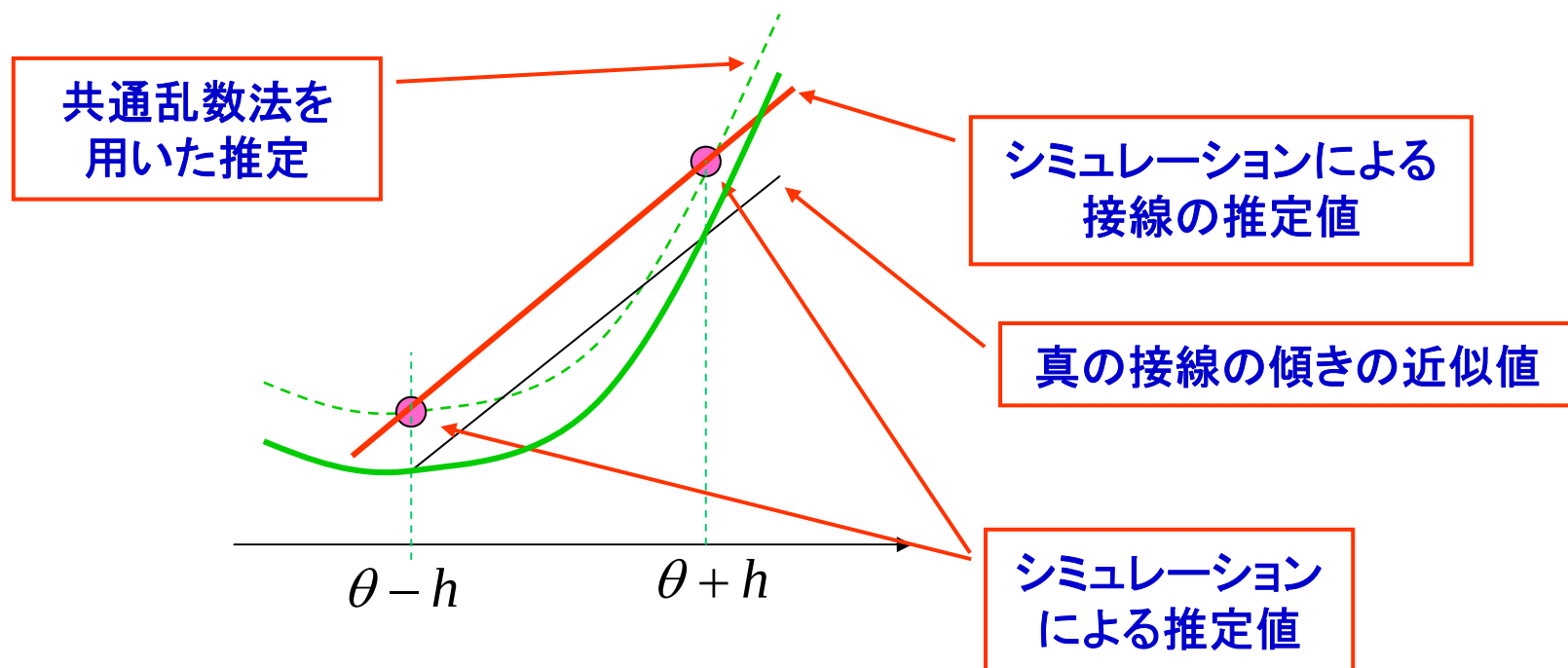
傾き（感度）の推定

- 一つの θ に対する関数値の「推定値」しか得られない
 - 導関数の推定には2点の推定値が必要



傾きの推定、共通乱数法

- 同一のランダム事象を用いてパラメータの感度を調べる
 - 過去のデータを仮想未来と考えると、「予測する」



傾きの推定、尤度比法

■ 決定論的最適化問題

$$\begin{aligned}\xi(\theta) &= E(h(X, \theta)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, \theta) f(x, \theta) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x, \theta) \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta_0)} f(x, \theta_0) dx = E_{\theta_0}(h(X, \theta) L(X; \theta, \theta_0))\end{aligned}$$

— $f(x, \theta_0)$ に従う標本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ に基づき、以下の問題を解く

$$\max_{\theta} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_k, \theta) L(X_k; \theta, \theta_0)$$

マルコフ連鎖モンテカルロ法

- 例：ジャクソン型ネットワークの定常分布
 - 通常は客の到着事象、サービス、移動、をトレースする
- 定常分布に収束するようなマルコフ連鎖を定義する
 - 系内客数を状態とするマルコフ連鎖
 - 周辺確率が幾何分布になることを利用して、推移確率を構成
 - 適当な初期状態から始めて、推移を繰り返す
 - 「極限分布は定常分布に等しい」
 - 「立ち上げの時間」を除き、定常状態シミュレーションが可能

参考図書

- Banks(ed.) (1998) Handbook of Simulation
- Banks, et al. (2005) Discrete-Event System Simulation (4th ed.)
- Rubinstein, Melamed (1998) Modern Simulation and Modeling
- Rubinstein, Kroese (2004) The Cross-Entropy Method
- 森戸、逆瀬川 (2000) 「システムシミュレーション」