ネットワークの性能評価

宮沢政清

東京理科大学

2005年6月18日

待ち行列研究部会テュートリアル発表資料

主な項目

- はじめに：理論研究の問題点と可能性
- 本発表の目的
- ネットワークモデルと安定性条件
  - 直感型，実効型，動的制御系の安定領域
- 多次元分布の裾の漸近特性
  - 準出生死滅過程 (QBD) について
  - 有限 QBDから無限 QBDへ
  - 連続時間Wiener-Hopf 分解とその応用
  - 反射型マルコフ加法過程への拡張
- おわりに：面白そうな問題

理論研究の問題点

待ち行列モデルは，システムの評価や最適化などのための数理モデルとして研究されてきた．

⇒ 理論研究の目的

- 安定性や不変的特性を調べる．
- 解析的に定常分布が得られるモデルを調べる．
- 定常分布等の数値計算アルゴリズムを与える．
- 漸近的特性や極限過程を求める．

⇒ よく批判される問題点

- 現実のモデルとかけ離れ役立たない．
- 難しい理論や複雑な数値計算よりシミュレーションの方が役立つ．

理論研究の可能性

理論研究の目的は，現実の問題を解決するための道具を提供することだが，問題は複雑化し，従来の道具では，対応できない場合が増えている．

⇒ 従来の典型的な方法

- 待ち行列が１つのモデル：行列解析法
- 解けるモデルを探す：積形式ネットワーク

⇒ これから期待される方法

- 複雑な系へ適用可能である：
  複数待ち行列モデル，動的制御系など
- 問題やモデルの単純化
  - 漸近的特性（定常分布の形状など）
  - 極限過程（流体近似，拡散近似，確率近似）

本発表の目的

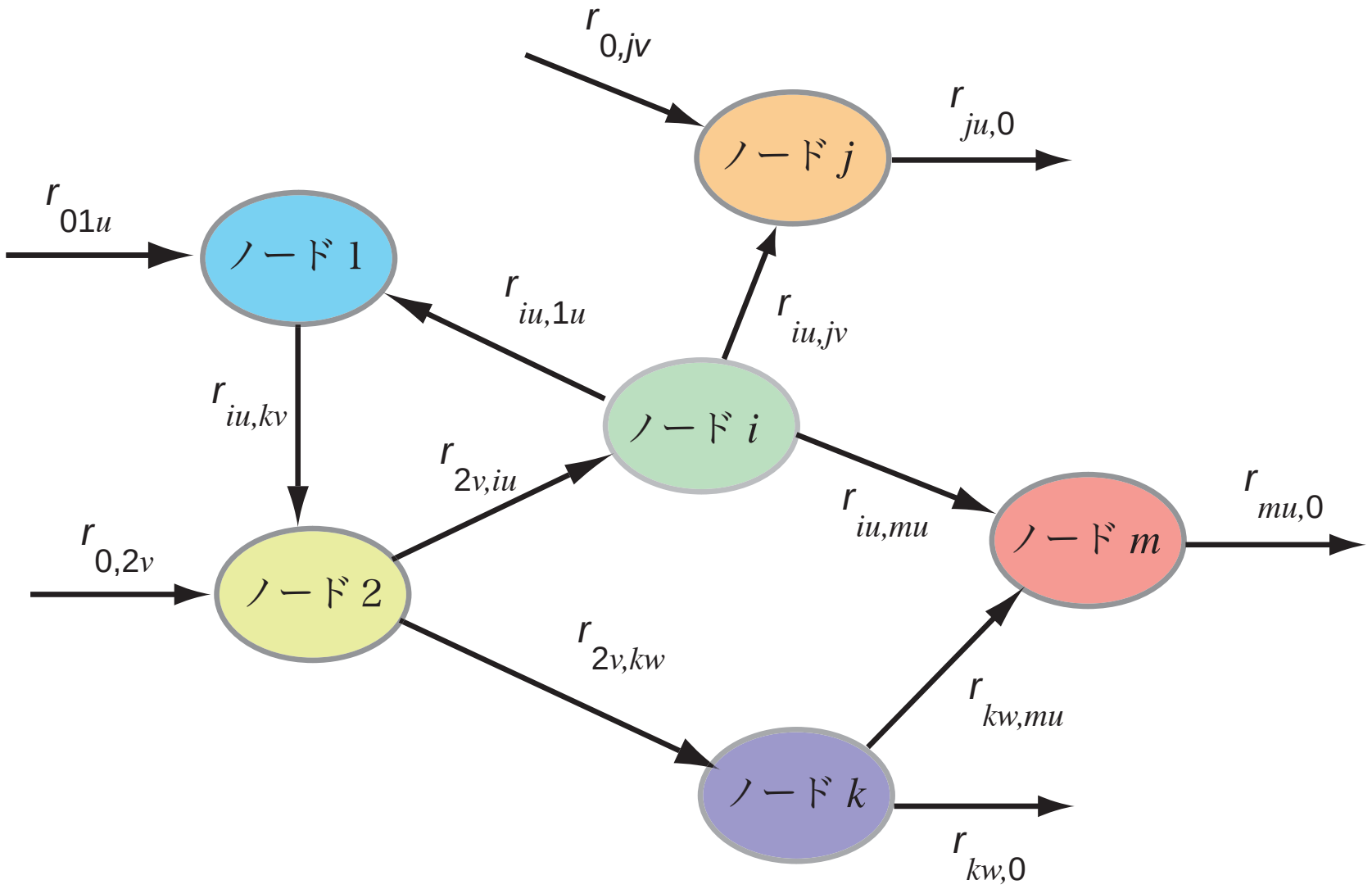
複数の待ち行列をもつシステムやそのネットワークの安定性について，

- 直感的安定性条件：$\rho_i \equiv \sum_u \rho_{iu} < 1.$
- 実効的安定性条件：$\sum_{i,u \in \text{実効集合}} \rho_{iu} < 1.$
- 動的経路選択がある場合の安定性条件

を紹介し，安定性条件の下で，以下のように多次元定常分布の裾の漸近特性を調べる．

- 準出生死滅過程を無限個の背後状態へ拡張
- Winer-Hopf 分解を使い漸近特性を調べる
- これらの結果を反射型マルコフ加法過程へ拡張できることを示す（ただし，概要のみ）．

ネットワークモデル


$r_{0,jv}$
$r_{ju,0}$
ノード j
r_{01u}
ノード 1
$r_{iu,1u}$
$r_{iu,jv}$
$r_{iu,kv}$
ノード i
$r_{2v,iu}$
$r_{iu,mu}$
$r_{mu,0}$
$r_{0,2v}$
ノード 2
ノード m
$r_{2v,kw}$
$r_{kw,mu}$
ノード k
$r_{kw,0}$

ネットワークモデルの仮定

$1, \ldots, m$ の番号がついた m 個のノードをもち，$1, 2, \ldots, J$ の番号がついた J 種類の客がある開放型のネットワークおいて，次のことを仮定する．

- 外部からノード i に種類 u の客が率 λ_{iu} で到着．
- ノード i でサービスを完了した種類 u の客は，確率 $r_{iu,jv}$ で，ネットワークの状態と独立にノード j へ種類 v の客として到着する．
- ノード i で種類 u の客をサービスするために必要な仕事量の平均を $1/\mu_{iu}$ とする．

各ノードが安定ならば，次の方程式が成立．

$$\alpha_{iu} = \lambda_{iu} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{v=1}^{J} \alpha_{jv} r_{jv,iu}, \quad \forall i, u. \qquad (1)$$

直感的安定条件

(1) 式をトラヒック方程式と呼ぶ.

$$r_{iu,0} = 1 - \sum_{i=1}^{m} \sum_{v=1}^{J} r_{iu,jv},$$
$$r_{0,iu} = \lambda_{iu} / (\sum_{j=1}^{m} \sum_{v=1}^{J} \lambda_{jv}).$$

とおくとき，行列 $R \equiv \{r_{iu,jv}\}$ が既約ならば，(1) を満たす α_{iu} は正でただ 1 つ定まる.

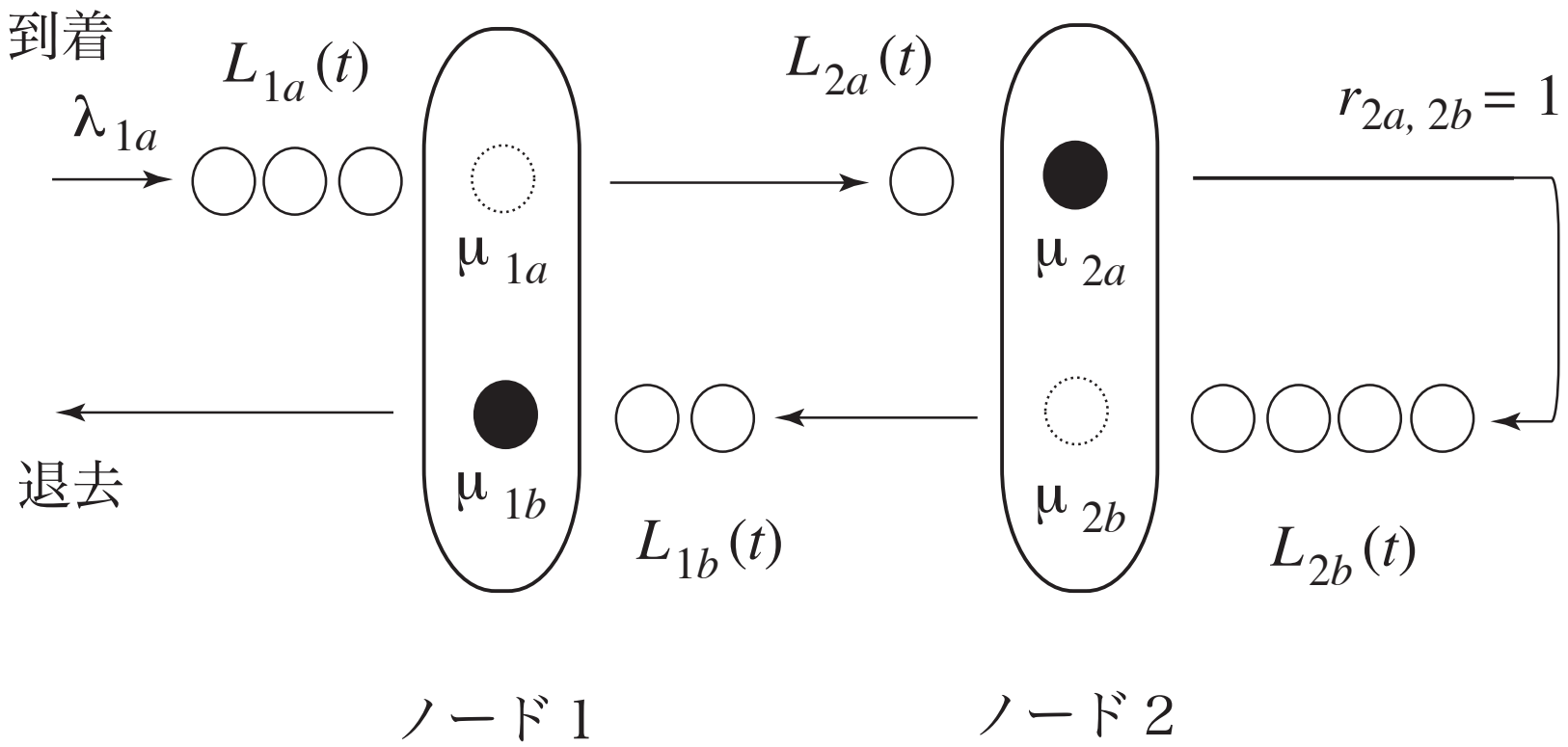
$$\rho_{iu} = \frac{\alpha_{iu}}{\mu_{iu}}, \qquad \rho_i = \sum_{u=1}^{J} \rho_{iu}$$

とおく．各ノードの処理速度が 1 ならば,

$$\rho_i < 1, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

が安定性条件（=定常分布が存在する条件）と予想されるが，安定とならない場合がある.

再入力ネットワーク



a, b は客の種類，ノード 1 は種類 b の客を優先サービス，ノード 2 は種類 a の客を優先サービスする．

実効的安定条件

同時にサービスが実行できない状態が起こるような（ノード，客の種類）の集合を $A_1, A_2, \ldots, A_K$ とする．これらの集合が存在するときの安定性は，(2) の条件に加えて，

$$\sum_{(i,u)\in A_\ell} \rho_{iu} < 1, \qquad \ell = 1, \ldots, K, \tag{3}$$

が必要である．これを実効的安定条件と呼ぶ．
$\Rightarrow$ 典型的な例：再入力ネットワーク

一般に，安定性が成り立つようなパラメーター $\mu_{iu}, r_{iu.jv}$ の値の集合を安定領域と呼ぶ．(2) と (3) は，どのノードも処理速度 1 をもつマルコフ型経路選択ネットワークの安定領域を与える．

動的制御系の安定領域

外部からの到着やサービス完了後の経路選択がネットワークの状態に依存する場合や，サーバーがネットワークの状態に依存して移動するモデルでは，安定性条件を一般的に求めることは困難である．

マルコフ過程によるモデル化ができる場合には，状態空間から実数の集合への関数を使い，安定性の十分条件を求めることがよく行われる．この関数をリヤプノフ関数と呼び，標準的な基準としてFosterの定理がある．

$\Rightarrow$ 多くの課題が残されている．

Fayolle, Malyshev, Menshikov, *Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains*

分布の裾の漸近特性

ネットワークなどの複雑な待ち行列系では,

- 定常分布の解析表現が困難
- 解析表現ができても特性量の計算が困難

$\Rightarrow$ 漸近的な特性を求める．特に，確率が小さい稀少事象の評価は重要である．

$\Rightarrow$ 多次元的定常分布の裾の減少率に注目．

確率ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ が定常分布に従うとする．集合 V と方向 $\boldsymbol{d}$ を与えたとき,

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t) P(\boldsymbol{X} \in t\boldsymbol{d} + V) = c \quad \text{（一定値）}$$

となるような関数 $\varphi(t)$ と定数 c を求めたい．

$$\varphi(t) : e^{at}, \quad t^b e^{at} \quad \text{などがある．}$$

裾集合Vと方向$\boldsymbol{d}$の選び方

- 最大値：$P(\max_i X_i > t)$
  $\Rightarrow \boldsymbol{d} = \mathbf{1},\ V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m; \max_i x_i > 0\}$
  ここに，$\mathbf{1}$はすべての成分が1であるベクトル.
- 最小値：$P(\min_i X_i > t)$
  $\Rightarrow \boldsymbol{d} = \mathbf{1},\ V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m; \boldsymbol{x} > \mathbf{0}\}$
- 第i成分に関する周辺分布の裾：$P(X_i > t)$
  $\Rightarrow \boldsymbol{d} = \mathbf{e}_i,\ V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m; x_i > 0\}$
  ここに，$\boldsymbol{e}_i$は第i成分が1であり，他の成分がすべて0のベクトル.
- $\boldsymbol{d}$方向の裾：$P(\boldsymbol{X} > t\boldsymbol{d})$
  $\Rightarrow V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m; \boldsymbol{x} > \mathbf{0}\}$

準出生死滅過程過程（QBD）

分布の裾の減少方向にレベルと呼ぶ状態を取り，その他の情報をすべて位相と呼ぶ背後状態として表す．時刻 t でのレベルを $X(t)$，背後状態を $Y(t)$ と表す．このとき，

- レベルは正の整数値，背後状態は離散的，
- $\{(X(t), Y(t)\}$ は連続時間マルコフ連鎖，
- 各時刻でのレベルの変化量は高々± 1，
- レベル 0 から，または，0 への変化を除いて，レベルの変化量*は背後状態にのみ依存する，

が成り立つならば，$\{(X(t), Y(t)\}$ を準出生死滅（QBD: Quasi Birth and Death）過程と呼ぶ．

注*）一般には，レベルに依存してもよい．

QBD の推移率行列

QBD を表す連続時間マルコフ連鎖 $\{(X(t), Y(t)\}$ の推移率行列を Q とすると,

$$Q = \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & 0 & 0 & \dots \\ B_{-1} & A_0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{-1} & A_0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

の三重対角形をしている．ここに，B_i は A_i と次元が異なってもよい．通常の QBD では，これらの行列は有限次元である．この場合を有限 QBD と呼ぶ.

有限QBDから無限QBDへ

複数待ち行列やネットワークモデルの状態は多次元であるから，QBDを適用するとき，背後状態は無限個になる．したがって，背後状態空間は無限個の要素をもつ．これを無限QBDと呼ぶ．

例1 1，2の2つのノードをもち，到着とサービスの完了が有限次元マルコフ連鎖に従って起こる待ち行列ネットワークを考える．また，ノードiでサービスを完了した客は確率r_iで他のノードへ行き，確率$1-r_i$で退去する（$i=1,2$）．時刻tでのノードiの客数を$L_i(t)$，2つのノードの到着やサービスの状態を$B(t)$で表すと，

$$X(t)=L_1(t), \qquad Y(t)=(L_2(t),B(t))$$

としたときの$(X(t),Y(t))$は無限QBDである．

無限 QBD

背後状態が有限個の場合には，滝根先生から詳しい説明があった．有限の場合の多くの結果はそのまま無限の場合に拡張できる．例えば，定常分布が存在するとき，(X, Y) が定常分布に従うとし，$\boldsymbol{\nu}_n = (P(X = n, Y = i); i \in S)$ とおくと，

$$\boldsymbol{\nu}_n = \boldsymbol{\nu}_1 R^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

が成り立つような $S \times S$ の非負値行列 R が存在する．ここに，S は背後状態空間とする．しかし，裾の漸近特性

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_i(n) P(X = n, Y = i) = c_i, \quad i \in S,$$

はレベル 0 の影響が大きく，S が無限の場合には，有限の場合 $(\varphi_i(n) = \alpha^n)$ と全く様相が異なる．

再び行列幾何形式解について

Q が定常分布 $\boldsymbol{\nu}$ をもつとき，$\boldsymbol{\nu}$ を

$$\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\nu}_1, \ldots)$$

のように表す．このとき，

$$A_1 + RA_0 + R^2 A_{-1} = 0 \tag{4}$$

の最小非負解 R が存在し，

$$\boldsymbol{\nu}_n = \boldsymbol{\nu}_1 R^{n-1}, \qquad n \geq 1, \tag{5}$$

この $\boldsymbol{\nu}$ は，行列幾何形式解と呼ばれる．

$$\alpha^n \boldsymbol{\nu}_n = \alpha \boldsymbol{\nu}_1 (\alpha R)^{n-1}$$

と変形できるが，一般に，αR は確率行列ではない．

行列母関数

$$A_*(z) = z^{-1}A_{-1} + A_0 + zA_1, \qquad z \in \mathbb{R},$$

により，行列母関数 $A_*(z)$ を定義し，

$$\Lambda_0 = A_0 + RA_{-1}, \quad G_{-1} = (-\Lambda_0)^{-1}A_{-1}$$

とおく．Λ_0 と G_{-1} の意味は

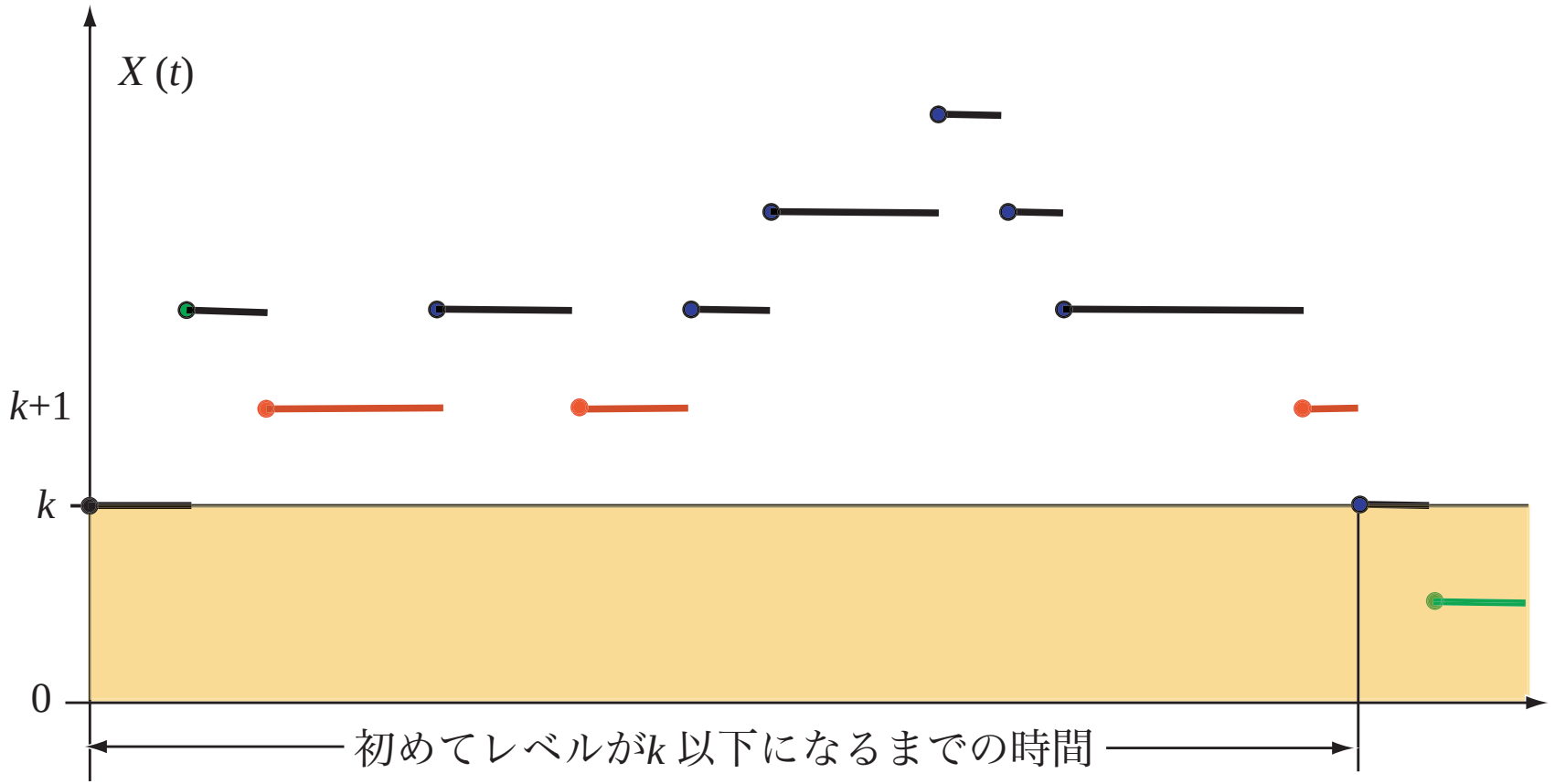
$[\Lambda_0]_{ij}$ = (レベルが -1 下がることなく，初めのレベルへ戻り，背後状態が i から j へ変化する率)

$[G_{-1}]_{ij}$ = (レベルが初めて -1 下がり，背後状態が i から j へ変化する確率)

行列母関数 $G_*(z)$ を以下のように定義する．

$$G_*(z) = z^{-1}(-\Lambda_0)^{-1}A_{-1}$$

レベル過程と行列 R, G



R の$i\,j$ 要素は，状態(k,i) から出発したとき，状態(k,i) から出た後にレベルが初めてk 以下になるまでに状態$(k+1,j)$ に滞在する時間の期待値を，状態(k,i) での平均滞在時間で割ったものに等しい

連続時間 Wiener-Hopf 分解

$(I - zR)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(zR)^{\ell}$ と (4) 式より

$$
\begin{aligned}
(I - zR)^{-1}A_*(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(zR)^n(zA_1 + A_0 + z^{-1}A_{-1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}R^n(A_1 + RA_0 + R^2A_{-1}) \\
&\qquad + A_0 + RA_{-1} + z^{-1}A_{-1} \\
&= \Lambda_0 + z^{-1}A_{-1}
\end{aligned}
$$

すなわち，(4) 式は，

$$A_*(z) = (I - zR)\Lambda_0(I - G_*(z)) \tag{6}$$

と同値である．これを Wiener-Hopf 分解と呼ぶ．

非負行列 R の分類

$R_*(u) = \sum_{\ell=0}^{\infty} u^n R^n$ とおく．このとき，

$$\mathrm{r}_R \equiv \sup\{u > 0, i, j \in S; [R_*(u)]_{ij} < \infty\}$$

を R の収束半径と呼ぶ．R の既約性を確率行列と同様に定義する．簡単のために，R は既約であるする．このとき，R を次のように分類する．

- $R_*(\mathrm{r}_R) < \infty$ ならば，r_R-一時的，
- $R_*(\mathrm{r}_R) = \infty$ ならば，r_R-再帰的，更に，
  - $\lim_{n\to\infty}(\mathrm{r}_R R)^n = 0$ ならば，r_R-零再帰的，
  - 零再帰的でないならば，r_R-正再帰的．

（同値な条件）$F_{ii}(u) = 1 - 1/[R_*(u)]_{ii}$ とおくと，r_R-一時的 $\Leftrightarrow F_{ii}(\mathrm{r}_R-) < 1$，$\mathrm{r}_R$-再帰的 $\Leftrightarrow F_{ii}(\mathrm{r}_R-) = 1$，$\mathrm{r}_R$-正再帰的 $\Leftrightarrow F'_{ii}(\mathrm{r}_R-) < \infty$．

行列 R^n の漸近特性と $A_*(z)$

ある非負値ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ があり，$\boldsymbol{\mu} A_*(z) \leq \mathbf{0}$ を満たす最大の z を z_0 とする．Wiener-Hopf 分解 (6) より，$z_0 \boldsymbol{\mu} R \leq \boldsymbol{\mu}$ であり，$\boldsymbol{\mu} A_*(z_0) = \mathbf{0}$ が成り立つのは $z_0 \boldsymbol{\mu} R = \boldsymbol{\mu}$ の時に限る．次の補題が証明できる．

補題 1 R は既約であるとする．このとき，R は，$\boldsymbol{\mu} A_*(z_0) \neq \mathbf{0}$ ならば，z_0-一時的，$\boldsymbol{\mu} A_*(z_0) = \mathbf{0}$ ならば，z_0-再帰的である．再帰的な場合には，$A_*(z_0)\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{h} > \mathbf{0}$ があり，

- $\boldsymbol{\mu h} < \infty$ のときは，R は z_0-正再帰的，
- $\boldsymbol{\mu h} = \infty$ のときは，R は z_0-零再帰的．

どの場合も，$z_0 \leq \mathrm{r}_R$ であり，再帰的ならば，$z_0 = \mathrm{r}_R$ である．なお，z_0 をスペクトル半径と呼ぶ．

定常分布 $\{\boldsymbol{\nu}_n\}$ の漸近特性

補題 1 と行列幾何形式 (5) より次の結果がり立つ.

定理 1 QBD が定常分布 $\{\boldsymbol{\nu}_n\}$ をもち, $\{A_\ell; \ell = 0, \pm 1\}$ が非周期的加法過程であり, $\boldsymbol{\mu} A_*(z_0) = \mathbf{0}$ が成り立つとする. このとき, $A_*(z_0)\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{h} > 0$ があり,

$$\boldsymbol{\nu}_0(B_0 + z_0 B_1)\boldsymbol{h} < \infty \tag{7}$$

ならば, $\boldsymbol{r} = -(A_0 + (z_0^{-1} I + R)A_{-1})\boldsymbol{h}$ とおくと, $z_0 R\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ であり,

$$\lim_{n\to\infty} z_0^n \boldsymbol{\nu}_n = \frac{z_0 \boldsymbol{\nu}_1 \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{r}} \boldsymbol{\nu} \tag{8}$$

が成り立つ. ここに, $\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{h} = \infty$ ならば, (8) の右辺は $\mathbf{0}$ に等しいとする.

定理１の証明の概略

$\Delta_{\boldsymbol{r}}$ を $\boldsymbol{r}$ の要素を対角成分とする対角行列とする．Wiener-Hopf 分解から $z_0 R\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ がいえる．よって，$z_0\Delta_{\boldsymbol{r}}^{-1}R\Delta_{\boldsymbol{r}}$ は確率行列であり，

$$\boldsymbol{\mu}\Delta_{\boldsymbol{r}}(z_0\Delta_{\boldsymbol{r}}^{-1}R\Delta_{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{\mu}\Delta_{\boldsymbol{r}}.$$

が成り立つ．$\boldsymbol{\mu h} < \infty$ のとき，$\boldsymbol{\mu}\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathbf{1} = \boldsymbol{\mu r} < \infty$ が証明できるので，R は z_0-正再帰的であり，マルコフ連鎖の収束定理より，

$$\begin{aligned}(z_0)^n\boldsymbol{\nu}_n\Delta_{\boldsymbol{r}} &= z_0\boldsymbol{\nu}_1\Delta_{\boldsymbol{r}}(z_0\Delta_{\boldsymbol{r}}^{-1}R\Delta_{\boldsymbol{r}})^{n-1} \\ &\to z_0\boldsymbol{\nu}_1\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathbf{1}\left(\frac{1}{\boldsymbol{\mu r}}\boldsymbol{\mu}\Delta_{\boldsymbol{r}}\right), \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

$\Delta_{\boldsymbol{r}}\mathbf{1} = \boldsymbol{r}$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} z_0^n\boldsymbol{\nu}_n = \frac{z_0\boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{\mu r}}\boldsymbol{\mu}.$$

QBDから反射型マルコフ加法過程へ

QBD のレベルの変化は ± 1 であるが，離散時間の場合には，任意の整数に拡張することができる．すなわち，$A_*(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n A_n$ により行列母関数を定義すれば，Wiener-Hopf 分解により，

$$(I - A_*(z)) = (I - R_*(z))(I - G_*(z)) \qquad (9)$$

を満たす，z^n $(n \geq 1)$ の行列関数 $R_*(z)$ と z^n $(n \leq 0)$ の行列関数 $G_*(z)$ が存在し，定常分布は，

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \boldsymbol{\nu}_n = \boldsymbol{\nu}_0 R^0(z)(I - R_*(z))^{-1}$$

により与えられる．

反射型マルコフ加法過程の拡張

これまでは，1次元マルコフ加法過程に対して原点に壁をおいて，レベルを非負の領域に制限した．このようなモデルを $GI/G/1$ 形式モデルと呼ぶ．また，QBD を除き，離散時間モデルが主に研究されてきた．しかし，一般的なネットワークに応用するためには次の拡張が望まれる．

- レベルを実数値とする．
- レベルをベクトル値にする．
- 背後状態を実数ベクトル値などに一般化．
- 連続時間モデルにする．

いずれの場合も，対応するマルコフ加法過程について，Wiener-Hopf 分解を導くことが可能である．

反射型加法過程による方法の問題点

反射型の多次元マルコフ加法過程と拡張された Wiener-Hopf 分解を使うことによって，ネットワークを含む複数待ち行列モデルに対して，

- 定常分布の解析表現を得ることができる．
- レベル 0 に相当する境界の影響が大きくないときには，マルコフ再生定理を使って分布の裾の漸近的な評価ができる．

しかし，次の問題点もある．

- 減少方向の取り方によっては困難がある．
- 指数的（または，幾何的）でない減少の場合の扱いが難しい．
- 境界の影響が大きい場合に，その影響を取り入れる方法が確立されていない．

おわりに：面白そうな問題を２つ

これまでに述べた方法を使って，

- ２ノードネットワークにおいて１つのノードのバッファーを制限したときの他のノードの客数の定常分布の裾の減少率の変化，
- ２つの待ち行列があり，到着客が短い方の行列を選ぶとき，短い待ち行列の定常分布の裾の減少率，

を調べた．これらの拡張として，次の問題がある．

- ノードが３つ以上のネットワークに対して，容量制限はどんな影響を与えるか？
- ３つ以上の待ち行列に対し，一番短い行列を選択した場合に減少率はどうなるか？

参考文献(これから学ぶ人へ)

[1] Bazaraa, M.S. , Sherali, H.D. and Shetty, C.M. (1993), *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2nd Ed., Wiley.（凸解析）

[2] Bremaud, P. (1999) *Markov Chains: Gibbs Field, Monte Calro Simulation and Queues*, Springer.（安定性）

[3] Bucklew, J.A. (2004) *Introduction to Rare Event Simulation*, Springer.（大偏差値理論）

[4] Rudin, W. (1991) *Functional Analysis*, 2nd Ed., Mcgraw-Hill.（線形作用素）

[5] Seneta, E. (1981) *Nonnegative Matrices and Markov Chains*, Springer.（非負行列）

追記：(6) 式と定理 1 に関する文献

(6) 式ような連続時間 Wiener-Hopf 分解は論文がほとんど無い．通常は一様化により離散時間型へ変換し，離散時間の Wiener-Hopf 分解を行う．

[1] Arjas, E. and Speed, T. P. (1973) Symmetric Wiener-Hopf factorizations in Markov additive processes, *Z. Wahrcheinlich. verw. Geb.* 26, 105–118.（離散時間 Wiener-Hopf 分解を一般的な条件の下で求めた論文）

[2] Miyazawa, M. and Zhao, Y.Q. (2004) The stationary tail asymptotics in the GI/G/1 type queue with countably many background states, *Advances in Applied Probability* 36 (4), 1231-1251.（定理 1 を離散時間 $GI/G/1$ 形式モデルに対して証明した論文）