日本オペレーションズ・リサーチ学会
2022年 春季研究発表会

一般化されたフィボナッチ多項式とニュートンによる一般化された二項定理の視覚化および関連する連分数と多重根号や等角螺旋の幾何学的特徴と対称性

01405264　大阪工業大学　　*中西　真悟　　　NAKANISHI Shingo

1. はじめに

本研究では，2021 年 OR 研究発表会[1-3]，EURO2021 のセッション「OR と芸術，創造性」[4]，大阪工業大学イノベーションデイズ 2020 と 2021[5,6]を基礎にまとめた研究ノート[7,8]の簡易的な紹介と若干の提案を行っている．個性ある三角形としてケプラー三角形，直角二等辺三角形，正三角形等を用いた同一焦点の楕円と等角螺旋の幾何学的関係を調べるために一般化されたフィボナッチ数列（$F_{(a,b),j}$）とその固有値（$\lambda_{(a,b)}$）

$$F_{(a,b),0} = 0, \quad F_{(a,b),1} = 1, \quad F_{(a,b),j} = a \cdot F_{(a,b),j-1} + b \cdot F_{(a,b),j-2} \quad (j \geq 2)$$

$$\text{or } F_{(a,b),j+1} = \sum_{l=0}^{\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor} \binom{j-l}{l} a^{j-2l} b^l \quad (j \geq 1) \text{ or } \begin{pmatrix} F_{(a,b),j+k} \\ F_{(a,b),j-1+k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} F_{(a,b),j} \\ F_{(a,b),j-1} \end{pmatrix} \quad (j \in \mathbb{Z})$$

$$\lambda_{(a,b)}^{j+2} = a \cdot \lambda_{(a,b)}^{j+1} + b \cdot \lambda_{(a,b)}^{j} \text{ or } \begin{pmatrix} \lambda_{(a,b)}^{j+k} \\ \lambda_{(a,b)}^{j-1+k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} \lambda_{(a,b)}^{j} \\ \lambda_{(a,b)}^{j-1} \end{pmatrix} \quad (j \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

が描く等角螺旋を幾何学的に考察した．ところで，その解の公式や多重根号や連分数を用いて

$$\lambda_{(a,b)}^2 - a \cdot \lambda_{(a,b)} - b = 0 \text{ or } \left(\lambda_{(a,b)} - a\right)^2 + a \cdot (\lambda_{(a,b)} - a) - b = 0 \text{ or } \lambda_{(a,b)}\left(\lambda_{(a,b)} - a\right) = b, \qquad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2}$$

$$\lambda_{(a,b)}\left(\lambda_{(a,b)} - a\right) = \left(\sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{b + a\sqrt{\cdots}}}}}\right)\left(\sqrt{b - a\sqrt{b - a\sqrt{b - a\sqrt{b - a\sqrt{\cdots}}}}}\right) = b,$$

$$\lambda_{(a,b)}\left(\lambda_{(a,b)} - a\right) = \left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)\left(-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}\right) = \left(a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\cdots}}}}\right)\left(\cfrac{b}{\cfrac{b}{\cfrac{b}{\cfrac{b}{\cdots - a} - a} - a} - a} - a\right) = b$$

とする一般形の対称性も表記できる．これらについて，ニュートンによる一般化された二項定理と一般化されたフィボナッチ多項式が何であるかをパスカルの三角形の応用で取り扱い図 1 に視覚化している．また，図 2 のように複素数を用いて二項定理を下記のように応用してガウス平面でオイラーの公式もしくはド・モアブルの公式によりシンプルに

$$z_{(a,b)}^x = \left(\sqrt{a} + i\sqrt{\frac{b}{\lambda_{(a,b)}}}\right)^x \text{ and } \bar{z}_{(a,b)}^x = \left(\sqrt{a} - i\sqrt{\frac{b}{\lambda_{(a,b)}}}\right)^x \quad \because \lambda_{(a,b)}^{2x} = z_{(a,b)}^x \cdot \bar{z}_{(a,b)}^x = \left(a + \frac{b}{\lambda_{(a,b)}}\right)^x \tag{3}$$

$$\text{or } z_{(a,b)}^x = \sqrt{\lambda_{(a,b)}}^x \exp\left(i \arccos\left(\sqrt{\frac{a}{\lambda_{(a,b)}}}\right)x\right) = \sqrt{\lambda_{(a,b)}}^x \left(\cos\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{\lambda_{(a,b)}}}\right)x\right) + i\sin\left(\arccos\left(\sqrt{\frac{a}{\lambda_{(a,b)}}}\right)x\right)\right)$$

の等角螺旋（ベルヌーイの対数螺旋）をピタゴラスの定理で考察する．図 2 に例示するように $a = b - 1$ の関係を有する等角螺旋が, 直角三角形の比で面白い傾向を有することもわかった. 中でも, a が黄金比の逆数 $\phi - 1 = 1/\phi$ のとき，等角螺旋のためのケプラー三角形を描くことができる二次方程式

$$\lambda_{(\phi-1,\phi)}^2 - (\phi - 1)\lambda_{(\phi-1,\phi)} - \phi = 0 \tag{4}$$

が成立し，ϕ は整数ではないが，式(2)で表現するその連分数と多重根号はとても美しい．

2. 等角螺旋の等角写像による幾何学的特性

等角写像により，等角螺旋は円，点，直線，放物線に写像される図として等角螺旋を構成する．図 2 には，$a = 1,2$ と，$b = 1,2$ の場合と，$(k =)a = 1$ で $b = \text{from 1 to 12}$ の等角螺旋の特徴を例示している．同時に，$k = 1$ として $b = ka + k^2$ で構成される直角三角形と対比して等角螺旋の対称性を描いてみた．k の値が対称性で重要であることがわかった．一部，$ab = 12$ の組の中で正三角形が例示できた．また，中心角に関する等角螺旋は

$$\lambda_{(ap,bp^2)}^2 = ap \cdot \lambda_{(ap,bp^2)} + bp^2 \tag{5}$$

で視覚化できることが示せた．このとき，

$$\lambda_{(ap,bp^2)} = p\lambda_{(a,b)} \text{ and } F_{(ap,bp^2),j} = p^{j-1}F_{(a,b),j} \qquad (6)$$

の関係が成り立つことも確認できた．

参考文献

[1] 中西真悟，“標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比（その 1） ケプラー三角形，ピタゴラスの定理，平方および代数螺旋の再考”，2021 年 OR 学会春季研究発表会予稿集，2-E-10，(2021)

[2] 中西真悟，“標準正規分布の累積分布関数を傾きとする黄金比や貴金属比の類似比（その 2）フィボナッチ数列の拡張とフラクタルを目指した等角螺旋デザイン”， 2021 年 OR 学会春季研究発表会予稿集，2-E-11，(2021)

[3] 中西真悟，“一般化フィボナッチ数列と二項定理を用いた貴金属比の類似比の幾何学的考察 ガウス平面を応用した等角螺旋の等角写像デザイン”，2021 年 OR 学会秋季研究発表会予稿集，1-D-2，(2021).

[4] Shingo Nakanishi, “Visualizations of discrete equiangular spirals based on similar metallic ratios using Pythagorean theorem and weighted Fibonacci sequences”, EURO2021, No.936, (2021)

[5] 中西真悟，“標準正規分布の幾何学的対称性 三平方の定理による累積確率評価”，大阪工業大学イノベーションデイズ 2020，(2020).

[6] 中西真悟，“貴金属比の類似比が奏でる数理情報デザイン 等角螺旋を目指したケプラー三角形とピタゴラスの定理と一般化されたフィボナッチ数列の協奏”，大阪工業大学イノベーションデイズ 2021，(2021).

[7] 中西真悟，“ピタゴラスの定理と標準正規分布に基づく螺旋および等角図の幾何学的考察 — 三角形と正方形や貴金属比の類似比によるアプローチ—”，大阪工業大学図書館紀要，Vol. 65，No. 2，pp.103-127, (2021).

[8] 中西真悟，“一般化されたフィボナッチ数列とピタゴラスの定理と二項定理を用いた貴金属比の類似比に関する等角螺旋の可視化と幾何学的特性”，自主研究ノート，大阪工業大学・著者ホームページ，pp.1-51，(2021).

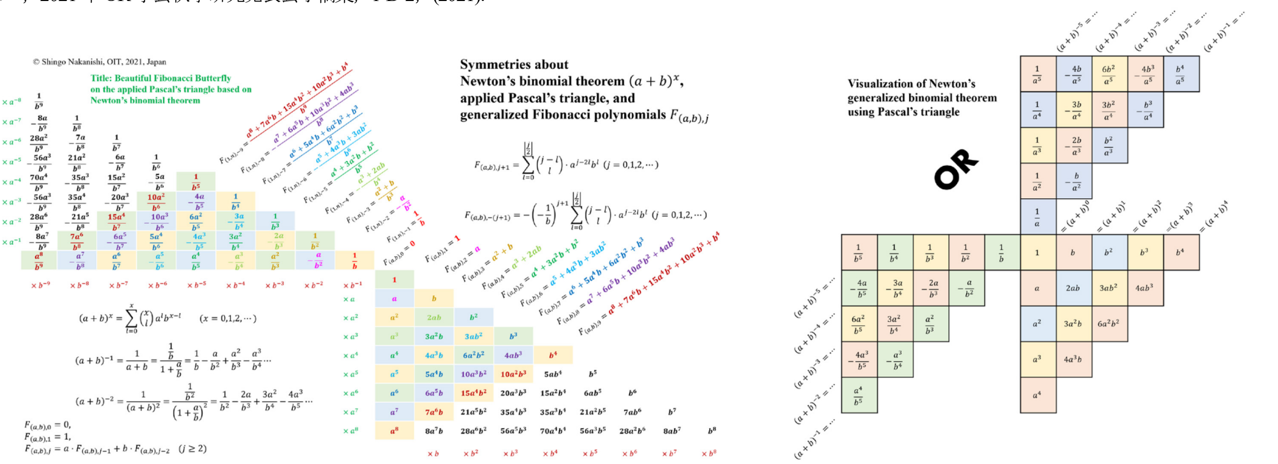

図 1 ニュートンによる一般化された二項定理，パスカル三角形の応用，一般化されたフィボナッチ数列の視覚化

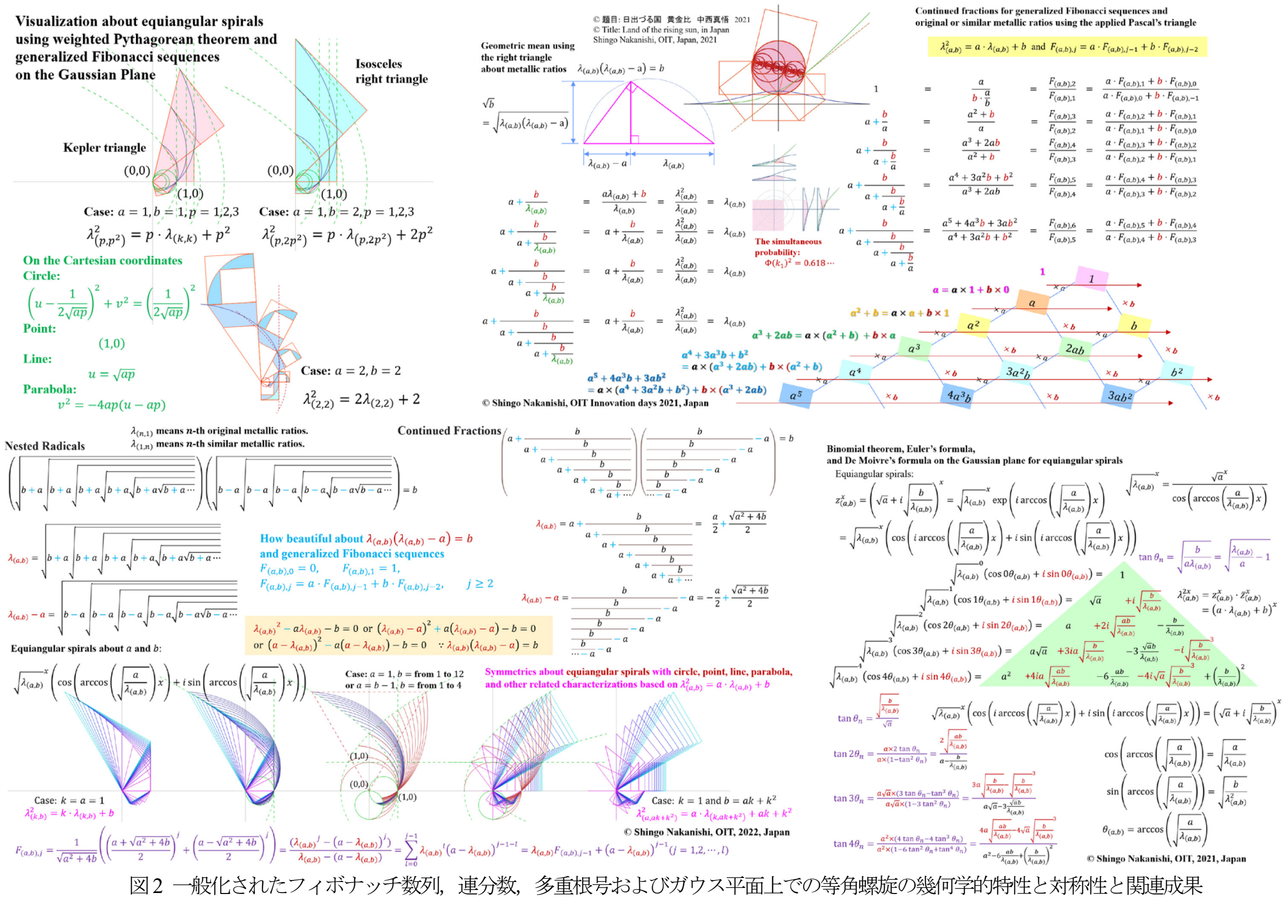

図 2 一般化されたフィボナッチ数列，連分数，多重根号およびガウス平面上での等角螺旋の幾何学的特性と対称性と関連成果