

集合値多目的最短経路問題

01110072 弘前大学 *金正道 KON Masamichi

1. はじめに

本稿では、有向グラフにおいて、ある頂点から他のすべての頂点への最短経路を求める問題を考える。ここで、各辺の長さは各成分が最小値と最大値が存在する実数の集合であるベクトルとして与えられていて、異なる2頂点間の経路の長さは経路する辺の長さの可換、結合的かつ単調な二項演算によって定義され、非劣最短経路を考える。

2. 最短経路問題

2.1. 二項演算と順序

$L \subset \mathbb{R}$, $L \neq \emptyset$ とし、 $\mathcal{K} = \{A \subset L : \min A, \max A \text{ が存在する}\}$ とする。また、各 $A \in \mathcal{K}$ に対して、 $A^L = \min A$, $A^R = \max A$ とする。

まず、 $L, L^n, \mathcal{K}, \mathcal{K}^n$ 上の二項演算を導入する。 $\bullet : L \times L \rightarrow L$ を L 上の二項演算とし、任意の $x, y, z \in L$ に対して次の条件 (i)–(iv) がみたされていると仮定する。

- (i) $x \bullet y = y \bullet x$ (可換性)
- (ii) $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$ (結合性)
- (iii) $y < z \Rightarrow y \bullet x < z \bullet x$ (狭義単調性)
- (iv) $x \leq x \bullet y, x \leq y \bullet x$ (両単調性)

例えば、 $L = [0, 1]$ のとき、各 $x, y \in L$ に対して $x \bullet y = 1 - \alpha(1-x)(1-y)$ とすると、 \bullet は上記条件 (i)–(iv) をみたす。ここで、 $\alpha \in (0, 1]$ である。

L^n 上の二項演算 $\bullet : L^n \times L^n \rightarrow L^n$ を各 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L^n$ および $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in L^n$ に対して、 $\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = (x_1 \bullet y_1, x_2 \bullet y_2, \dots, x_n \bullet y_n)$ とする。 \mathcal{K} 上の二項演算 $\circ : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ を各 $A, B \in \mathcal{K}$ に対して、 $A \circ B = \{x \bullet y : x \in A, y \in B\}$ とする。 \bullet の可換性および単調性より、 $A, B \in \mathcal{K}$ に対して $(A \circ B)^L = A^L \bullet B^L$, $(A \circ B)^R = A^R \bullet B^R$ となる。 \mathcal{K}^n 上の二項演算 $\circ : \mathcal{K}^n \times \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ を各 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{K}^n$ および $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n) \in \mathcal{K}^n$ に対して、 $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = (A_1 \circ B_1, A_2 \circ B_2, \dots, A_n \circ B_n)$ とする。

次に、 \mathcal{K} および \mathcal{K}^n 上の擬順序 (反射的, 推移的) および狭義半順序 (非反射的, 推移的) を導入する。 $A, B \in \mathcal{K}$ に対して、「 $A \preceq B \stackrel{\text{def}}{=} A^L \leq B^L, A^R \leq B^R$ 」 「 $A \prec B \stackrel{\text{def}}{=} A \preceq B, A \not\preceq B$ 」 とする。このとき、 \preceq は \mathcal{K} 上の擬順序になり、 \prec は \mathcal{K} 上の狭義半順序になる。 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{K}^n$ および $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n) \in \mathcal{K}^n$

に対して、「 $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} A_i \preceq B_i, i = 1, 2, \dots, n$ 」 「 $\mathbf{A} \prec \mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \preceq \mathbf{B}, \mathbf{A} \not\preceq \mathbf{B}$ 」 とする。このとき、 \preceq は \mathcal{K}^n 上の擬順序になり、 \prec は \mathcal{K}^n 上の狭義半順序になる。

2.2. 定式化

$G = (V, E)$ をグラフとする。ここで、 $V = \{1, 2, \dots, m\}$, $m \geq 2$ は頂点の集合であり、 $E \subset (V \times V) \setminus \{(i, i) : i \in V\}$ は辺の集合である。各辺 $(i, j) \in E$ は長さ $A_{ij} \in \mathcal{K}^n$, $n \geq 2$ をもつとする。2つ以上の頂点の列 $P = (s, i, j, \dots, k, t)$ で $(s, i) \in E, (i, j) \in E, \dots, (k, t) \in E$ をみたすものを s から t への経路といい、 $\mathbf{A}_{si} \circ \mathbf{A}_{ij} \circ \dots \circ \mathbf{A}_{kt}$ を P の長さとして定義する。

$s, t \in V, s \neq t$ とし、 \mathcal{P}_{st} を s から t へのすべての経路の集合とし、 $P^* \in \mathcal{P}_{st}$ とする。また、各 $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して、 $\ell(P)$ を P の長さとする。 P^* が s から t への最短経路であるとは、任意の $P \in \mathcal{P}_{st}$ に対して $\ell(P^*) \preceq \ell(P)$ となるときをいう。 P^* が s から t への非劣最短経路であるとは、 $P \in \mathcal{P}_{st}, \ell(P) \preceq \ell(P^*)$ ならば $\ell(P) \succeq \ell(P^*)$ となるときをいう。非劣最短経路は必ず存在する。

ある頂点 $s \in V$ から他の頂点 $t \in V$ への最短経路または非劣最短経路を求める問題を最短経路問題という。

3. ダイクストラ法

本節では、各辺 $(i, j) \in E$ が長さ $a_{ij} \in L$ をもつとし、各経路 $P = (s, i, j, \dots, k, t)$ の長さは $a_{si} \bullet a_{ij} \bullet \dots \bullet a_{kt}$ と定義されているとし、最短経路問題を考える。以下で述べるダイクストラ法は、もとのダイクストラ法 (Dijkstra [1]) を少しだけ修正したものであり、ある頂点 $s \in V$ から他のすべての頂点への最短経路を求める。

ダイクストラ法

(0) $S := \{s\}, \bar{S} := V \setminus \{s\}$ とし、各 $i \in V \setminus \{s\}$ に対して

$$d(i) := \begin{cases} a_{si} & \text{if } (s, i) \in E \\ \infty & \text{if } (s, i) \notin E \end{cases}$$

$$p(i) := s \quad \text{if } (s, i) \in E$$

とする。

(1) $S = V$ ならば終了。そうでなかったら

$$d(v) = \min\{d(i) : i \in \bar{S}\}$$

となる頂点 $v \in \bar{S}$ を選ぶ。

(2) $S := S \cup \{v\}$, $\bar{S} := \bar{S} \setminus \{v\}$ とし、 $(v, j) \in E$, $j \in \bar{S}$ であるすべての辺 (v, j) に対して

$$d(j) > d(v) \bullet a_{vj} \text{ ならば } d(j) := d(v) \bullet a_{vj}, p(j) := v$$

とする。ステップ (1) に戻る。

4. 最短経路問題のスカラー化

$\psi : \mathcal{K} \rightarrow L$ を各 $A \in \mathcal{K}$ に対して $\psi(A) = A^L \bullet A^R$ と定義し、 ψ を \mathcal{K} に対するスカラー化関数とよぶ。

• の可換性と結合性より、任意の $x, y \in \psi(\mathcal{K})$ および $x = \psi(A)$, $y = \psi(B)$ となる任意の $A, B \in \mathcal{K}$ に対して $x \bullet y = \psi(A \circ B)$ となる。よって、任意の有限個の $A, B, \dots, C \in \mathcal{K}$ に対して $\psi(A) \bullet \psi(B) \bullet \dots \bullet \psi(C) = \psi(A \circ B \circ \dots \circ C)$ となる。 $\psi : \mathcal{K}^n \rightarrow L^n$ を各 $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{K}^n$ に対して $\psi(\mathbf{A}) = (\psi(A_1), \psi(A_2), \dots, \psi(A_n))$ と定義する。このとき、任意の有限個の $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{K}^n$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n) \in \mathcal{K}^n$, $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n) \in \mathcal{K}^n$ に対して $\psi(\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \dots \circ \mathbf{C}) = \psi(\mathbf{A}) \bullet \psi(\mathbf{B}) \bullet \dots \bullet \psi(\mathbf{C})$ となる。 $f : L^n \rightarrow L$ を各 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L^n$ に対して $f(\mathbf{x}) = x_1 \bullet x_2 \bullet \dots \bullet x_n$ と定義し、 f を L^n に対するスカラー化関数とよぶ。このとき、任意の有限個の $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{K}^n$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_n) \in \mathcal{K}^n$, $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n) \in \mathcal{K}^n$ に対して $f(\psi(\mathbf{A} \circ \mathbf{B} \circ \dots \circ \mathbf{C})) = f(\psi(\mathbf{A}) \bullet \psi(\mathbf{B}) \bullet \dots \bullet \psi(\mathbf{C}))$ となる。また、• の可換性より

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{K}^n, \mathbf{A} \prec \mathbf{B} \Rightarrow f(\psi(\mathbf{A})) < f(\psi(\mathbf{B})) \quad (1)$$

となる。

最短経路問題において、 $\mathbf{A}_{ij} \in \mathcal{K}^n$, $(i, j) \in E$ および \circ を $f(\psi(\mathbf{A}_{ij})) \in L$, $(i, j) \in E$ および \bullet で置き替えた最短経路問題をスカラー最短経路問題とよぶことにする。スカラー最短経路問題はダイクストラ法を適用することによって解くことができる。

定理 (1) が成り立つと仮定する。 $s, t \in V, s \neq t$ とし、 P^* をスカラー最短経路問題における s から t への最短経路とする。このとき、 P^* はもとの最短経路問題における s から t への非劣最短経路になる。

5. 数値例

図1の最短経路問題を考える ($s = 1$)。ここで、 $L = [0, 1)$ とし、各 $x, y \in L$ に対して $x \bullet y = 1 - \frac{1}{2}(1 - x)(1 - y)$ とし、 $\mathbf{A}_{12} = ([0.124, 0.155], [0.236, 0.238])$, $\mathbf{A}_{13} = ([0.148, 0.202], [0.046, 0.105])$, $\mathbf{A}_{23} = ([0.197, 0.227], [0.147, 0.265])$, $\mathbf{A}_{24} = ([0.044, 0.100], [0.075, 0.173])$, $\mathbf{A}_{34} = ([0.222, 0.315], [0.301, 0.346])$, $\mathbf{A}_{35} = ([0.004, 0.020], [0.089, 0.100])$, $\mathbf{A}_{45} = ([0.004, 0.20], [0.089, 0.100])$ とする。

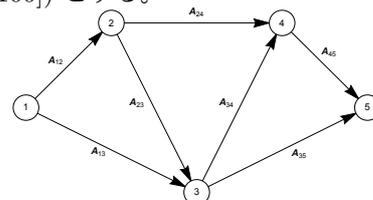


図1 最短経路問題

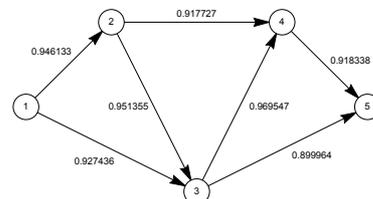


図2 スカラー最短経路問題

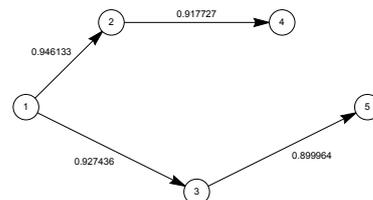


図3 最短経路木

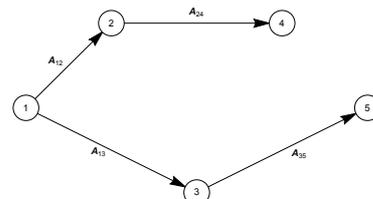


図4 非劣最短経路木

6. おわりに

本稿では、集合値多目的最短経路問題を扱った。そして、スカラー最短経路問題にダイクストラ法を適用し、もとの最短経路問題における非劣最短経路を求めることができることを示した。また、最長経路問題についても同様な結果が得られる。

参考文献

- [1] E. W. Dijkstra, A note on two problems in connexion with graphs, Numerische Mathematik, Vol.1, 1959, pp.269–271