日本オペレーションズ・リサーチ学会
2021年 秋季研究発表会

Colin de Verdière型ラプラシアンパラメータと テンセグリティの実現可能次元

東京大学　*大場亮俊　OBA Ryoshun
01309564　東京大学　谷川眞一　TANIGAWA Shin-ichi

1.　はじめに

グラフ G の Colin de Verdière 数 $\mu(G)$ とは，G の正重み付き一般化隣接行列のスペクトルから定まるグラフパラメータである．μ はマイナー単調性をもつ．驚くべきことに μ はグラフの位相的な性質を反映することが示されている [3, 5]．同種の代数的パラメータとして $\nu^{=}$ が導入されている [7]．

別の文脈で [1] は，グラフ実現問題の SDP 緩和における低ランク解の存在性を基に，実現可能次元という幾何パラメータ $\mathrm{rd}^{=}$ を導入した．[4] は類似の幾何パラメータ $\mathrm{gd}^{=}$ を導入し，Colin de Verdière 型パラメータ $\nu^{=}$ と関連付けた．具体的には [4] は半正定値行列補間問題の低ランク解の存在性を基に $\mathrm{gd}^{=}$ を定義し，SDP の主双対の観点から $\nu^{=}(G) \le \mathrm{gd}^{=}(G)$ を示した．

本研究では，多重グラフ G に対して，非ゼロ重み付きラプラシアン行列のスペクトルから Colin de Verdière 型グラフパラメータ $\lambda(G)$ を定義する．そして λ がマイナー単調性をもつことを示す．またグラフ実現問題の SDP 緩和の主双対の観点から，λ を幾何パラメータ rd と結びつけ，$\lambda(G) \le \mathrm{rd}(G)$ を示す．ここで $\mathrm{rd}(G)$ は多重グラフ G 上のテンセグリティの実現可能性を基に定まるもので，既存のパラメータ $\mathrm{rd}^{=}(G)$ の一般化にあたる．さらに三角格子グラフの λ の値を計算することで，λ および rd の木幅との関係性を明らかにする．

2.　Colin de Verdière 型パラメータ

以下 $G=(V,E)$ は有限無向グラフとし，$V=\{1,\dots,n\}$ とする．$n\times n$ 実対称行列全体を $\mathcal{S}^n$，$n\times n$ 半正定値対称行列全体を $\mathcal{S}^n_+$ で表す．グラフ G について $\mathcal{A}^-(G)\subset\mathcal{S}^n$ を

$$\mathcal{A}^-(G)=\left\{A\in\mathcal{S}^n:\ \begin{array}{l}A[i,j]<0\,(ij\in E)\\ A[i,j]=0\,(i\ne j, ij\notin E)\end{array}\right\}$$

で定める．$\mathcal{A}^-(G)$ 内の行列の第二固有値に注目し，その重複度の最大値 $\mu_0(G)=\max\{\dim\ker A: A\in\mathcal{A}^-(G)$, 負固有値数が $1\}$ を考える．

この $\mu_0(G)$ の見積もりは難しいとされるが，Colin de Veridière[3] は $A\in\mathcal{A}^-(G)$ にある条件を課すとよい振る舞いを見せることを発見した．$A\in\mathcal{S}^n$ が (G に関して)**Strong Arnold 性 (SAP)** を有するとは，$S[i,i]=0\ (\forall i\in V)$，$S[i,j]=0\ (\forall ij\in E)$，$AS=0$ の 3 条件を満たす非ゼロ対称行列 $S\in\mathcal{S}^n$ が存在しないことをいう．Colin de Verdière 数を

$$\mu(G)=\max\left\{\dim\ker A:\ \begin{array}{l}A\in\mathcal{A}^-(G)\\ \text{負固有値数が }1\\ \text{SAP を有する}\end{array}\right\}$$

と定める．すると μ はマイナー単調性をもち，以下のようにグラフの位相的な性質を反映する．

定理 1 ([3, 5])．
- $\mu(G)\le 2 \Leftrightarrow G$ は外平面的
- $\mu(G)\le 3 \Leftrightarrow G$ は平面的
- $\mu(G)\le 4 \Leftrightarrow G$ は $\mathbb{R}^3$ へリンクなし埋込可能

[7] は Colin de Verdière 型パラメータ $\nu^{=}$ を導入した．グラフ G に対し $\mathcal{A}(G)\subset\mathcal{S}^n$ を $\mathcal{A}(G)=\{A\in\mathcal{S}^n: A[i,j]=0\,(i\ne j, ij\notin E)\}$ で定める．グラフパラメータ $\nu^{=}$ を

$$\nu^{=}(G)=\max\left\{\dim\ker A:\ \begin{array}{l}A\in\mathcal{A}(G)\cap\mathcal{S}^n_+\\ \text{SAP を有する}\end{array}\right\}$$

と定めると，$\nu^{=}$ もマイナー単調性をもつ．

3.　SDP と実現可能次元

グラフ G と頂点配置 $p:V\to\mathbb{R}^d\ (d\in\mathbb{N})$ の組 (G,p) に対し，次の SDP の実行可能性問題 $\mathrm{P}(G,p)$ を考える:

$$\begin{array}{ll}\text{Find} & X\in\mathcal{S}^n_+\\ \text{s.t.} & \langle X,F_{ij}\rangle=\|p(i)-p(j)\|^2\quad(\forall ij\in E)\end{array}$$

ただし，$F_{ij}=(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_i-\boldsymbol{e}_j)^\top$ とする．$\mathrm{P}(G,p)$ は (G,p) と辺長の等しい頂点配置を求めるグラフ

実現問題の SDP 緩和である．グラフの実現可能次元 $\mathrm{rd}^=(G)$ は

$$\mathrm{rd}^=(G) = \max_p \min \left\{ d' : \begin{array}{l} \exists X \text{ s.t. } \operatorname{rank} X \le d', \\ \mathrm{P}(G,p) \text{ の実行可能解} \end{array} \right\}$$

で定まる．ここで p は任意次元の任意の頂点配置を渡る．$\mathrm{rd}^=$ は自明にマイナー単調性をもつ．

[4] は類似の幾何パラメータ $\mathrm{gd}^=$ を導入した．$\mathbb{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ を $d-1$ 次元球面とする．G と $p : V \to \mathcal{S}^{d-1}$ の組に対して次を考える:

$$\begin{array}{ll} \text{Find} & X \in \mathcal{S}^n_+ \\ \text{s.t.} & X_{ij} = p(i)^\top p(j) \quad (i = j \text{ or } ij \in E) \end{array}$$

これは半正定値行列補間問題である．これに対して同様の方法で，幾何パラメータ $\mathrm{gd}^=(G)$ が定まる．[4] は上の SDP の双対問題を考えることで，$\nu^=(G) \le \mathrm{gd}^=(G)$ という関係を示した．

4. 本研究の結果

$J \in \mathcal{S}^n$ を全要素 1 の行列とする．多重グラフ G 上の辺重み $\omega : E \to \mathbb{R}$ の重み付きラプラシアン行列を $L_{G,\omega}$ で表す．非ゼロ辺重み $\omega : E \to \mathbb{R}_{\neq 0}$ に対する $L_{G,\omega}$ 全体を $\mathcal{L}^*(G)$ で表す．$L \in \mathcal{L}(G)$ が **Euclidean SAP** を有するとは，$S(L+J) = 0$, $\langle S, (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j)^\top \rangle = 0$ $(\forall ij \in E)$ を満たす非ゼロ対称行列 $S \in \mathcal{S}^n$ が存在しないことをいう．

パラメータ λ を，連結多重グラフ G に対して，

$$\lambda(G) = \max \left\{ \dim \ker L : \begin{array}{l} L \in \mathcal{L}^*(G) \cap \mathcal{S}^n_+, \\ \text{Euclidean SAP} \end{array} \right\}$$

とし，$\lambda(G) = \max\{\lambda(H) : H \text{ は } G \text{ の連結成分}\}$ と定める．このとき以下が成り立つ．

定理 2. λ はマイナー単調性をもつ．

次に λ の双対にあたる幾何パラメータを定義する．多重グラフ G と符号関数 $\sigma : E \to \{\pm 1\}$ の組 (G,σ) であって，どの多重辺上でも σ が一定でないものを**符号グラフ**という．符号グラフ (G,σ) と $p : V \to \mathbb{R}^d$ の組 (G,σ,p) を**テンセグリティ**という．テンセグリティ (G,σ,p) に対して次を考える:

$$\begin{array}{lll} \text{Find} & X \in \mathcal{S}^n_+ & \\ \text{s.t.} & \langle X, F_{ij} \rangle \le \|p(i) - p(j)\|^2 & (\sigma(ij) = +1) \\ & \langle X, F_{ij} \rangle \ge \|p(i) - p(j)\|^2 & (\sigma(ij) = -1). \end{array}$$

これは (G,σ,p) から変形可能なテンセグリティを記述する．多重グラフの実現可能次元 $\mathrm{rd}(G)$ を

$$\mathrm{rd}(G) = \max_{(G,\sigma,p)} \min \left\{ d' : \begin{array}{l} \exists X \text{ s.t. } \operatorname{rank} X \le d', \\ \mathrm{P}(G,\sigma,p) \text{ の実行可能解} \end{array} \right\}$$

で定める．rd もマイナー単調性をもつ．Connelly の超安定性定理 [2] より次が成り立つ．

定理 3. 任意 G について，$\lambda(G) \le \mathrm{rd}(G)$ である．

さらに λ, rd はグラフの木幅と関係する．サイズ r の三角格子グラフを Δ_r と表す．$\mathrm{rd}^=(\Delta_r) = r-1$ $(r \ge 3)$ が [6] により得られていたが，$\lambda(\Delta_r)$ の下からの評価と定理 3 から少し強い次が従う．

定理 4. $r \ge 3$ について，$\lambda(\Delta_r) = \mathrm{rd}(\Delta_r) = r-1$.

定理 4 とグリッドマイナー定理より，λ および rd の log と木幅の log が定数倍しか違わないことが従う．

参考文献

[1] M. Belk and R. Connelly. Realizability of graphs. *Discrete & Computational Geometry*, 37(2):125–137, 2007.

[2] R. Connelly. Rigidity and energy. *Invent. math.*, 66(1):11–33, 1982.

[3] Y. Colin de Verdière. Sur un nouvel invariant des graphes et un critere de planarité. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 50(1):11–21, 1990.

[4] M. Laurent and A. Varvitsiotis. A new graph parameter related to bounded rank positive semidefinite matrix completions. *Mathematical Programming*, 145(1-2):291–325, 2014.

[5] L. Lovász and A. Schrijver. A borsuk theorem for antipodal links and a spectral characterization of linklessly embeddable graphs. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126(5):1275–1285, 1998.

[6] G. Joret S. Fiorini, H. Tony and C. Muller. Unavoidable minors for graphs with large ℓ_p-dimension. *Discrete & Computational Geometry*, pages 1–43, 2021.

[7] H. van der Holst. *Topological and spectral graph characterizations*. PhD thesis, University of Amsterdam, 1996.