日本オペレーションズ・リサーチ学会
2021年 秋季研究発表会

ランダム K-out-of-N システムを利用したグラフ信頼性

01604880　早稲田大学　毛利裕昭　MOHRI Hiroaki
01208666　（国研）産業技術総合研究所　*竹下潤一　TAKESHITA Jun-ichi

1. はじめに

本稿では単純で連結な（無向）グラフ $G = (V(G), E(G), \phi_G)$ の信頼性について議論する．$V(G)(\neq \emptyset)$ の元を**頂点**とよび，$E(G)$ の元を**辺**とよぶ．ただし，本稿では $V(G), E(G)$ はともに有限集合であると仮定する．ϕ_G は**接続関数**とよび，G の辺に G の頂点対を対応させる．$e \in E(G)$ で u, v が $\phi_G(e) = uv(= vu)$ である頂点であれば，u と v を e の端点とよぶ．ここで，u と v の順は無視する．また，両端点が一致する辺を**ループ**と，両端点が異なる辺を**リンク**という．G が**単純**であるとは，G がループを持たずかつ，G の任意の異なる 2 頂点間が高々1 つのリンクで結ばれているときをいう．さらに，G の頂点と辺の交代列 $W = v_0e_1v_1e_2 \cdots e_kv_k$（ただし，$e_i \in E(G)$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ で e_i の両端点は v_{i-1} と v_i.）を G における**歩道**といい，$e_1, \ldots, e_k$，$v_0, \ldots, v_k$ がすべて異なるとき W を**道**という．そして，G が**連結**であるとは，G の任意の 2 頂点間に少なくとも 1 つ以上の道が存在するときをいう．

グラフはネットワーク構造を表現できるため，グラフを用いて電気網，水道網，交通網など様々なインフラストラクチャーのモデル化を行い，それらの信頼性評価に利用されることがしばしばある．例えば，信頼性工学分野では特別な 2 頂点（シンクとソース）を持つシステムに関して，各頂点と各辺がそれぞれ故障分布をもつ仮定のものでシステム全体の故障分布，平均故障時間や最適保全計画について研究されている [1]．一方，離散システム分野では各辺や各頂点が一定の確率で故障する仮定のもとで，巨大グラフ全体の連結性やそれを効率良く判定するアルゴリズムが研究されている [2]．しかし，各頂点や各辺がそれぞれ故障分布をもつ仮定のもとで，グラフ全体の連結性を議論している先行研究はあまりない．

そこで本稿では，連結グラフの辺のみが故障するとし，各辺は独立で同一の故障分布を持つと仮定し，グラフ全体の故障分布を導出することを目的とする．なお，連結グラフ G が非連結になったとき，すなわちある異なる 2 頂点 $u, v \in V(G)$ があって u と v 間に道が存在しなくなったとき，G は**故障**したと考える．

2. 方針

N 個のユニットで構成され, N 個のうち少なくとも K 個のユニットが故障したときにシステム全体が稼働しなくなるシステムを K*-out-of-*N **システム**とよぶ．通常 K は定数であるが, Ito *et al.* [3] では K が確率変数となる**ランダム** K*-out-of-*N **システム**が提案されている．

いま，与えられたグラフ $G = (V(G), E(G))$（ただし $|E(G)| = M$）に対して，各辺 $e \in E(G)$ をランダム K-out-of-N システムのユニットに対応させ，各辺が独立で同一の故障分布関数 $F(t)$ を持つと仮定する．このとき，K の分布関数 $P_k := P(K \le k)$ $(k = 1, \ldots, M)$ は，M 本の辺から k 本選択した際にグラフが故障する確率となるため，グラフ全体の故障分布を考えることとランダム K-out-of-N システムの確率変数 K の分布関数を考えることを同一視することが可能である．

さらに Ito *et al.* [3] では，各ユニットが独立で同一の故障分布関数を持っている場合に，ランダム K-out-of-N システム全体の故障分布関数が

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{k=1}^{N} P_k \binom{N}{k} (1 - F(k))^k F(t)^{N-k} \qquad (1)$$

であることも示している．これを利用すれば，グラフ G に対応するランダム K-out-of-N システムの確率変数 K の分布関数を求めることで，グラフ G の故障分布関数を導出することが可能となる．

3. 主結果

まず次の用語を準備する．

定義 1. $u, v \in V(G)$ $(u \neq v)$ とし $F \subset E(G)$ とする．このとき，

- 辺集合 $F \subset G(G)$ が G **の uv-非連結化集合**であるとは，グラフ $G-F$ 内に u と v 間の道が存在しないときをいう．
- 辺集合 $F \subset G(G)$ が G **の uv-カット集合**であるとは，F が uv-非連結化集合でかつ，F の任意の真部分集合 F' が uv-非連結化集合ではないときをいう．

また，$|F| = k$ のとき**サイズ** k であるという．∎

ある連結グラフ $H = (V(H), E(H)$ に辺を 1 本追加し連結グラフ $G = (V(G), E(G))$ を生成することを考えると，その生成手順は次の 2 通りに場合分けできる.（図 1 を参照せよ.）

(i) グラフ H の頂点とグラフ H の頂点ではない新たな頂点を両端点とする辺をグラフ H に追加し，グラフ G を生成する．

(ii) グラフ H の異なる 2 頂点である辺の両端点となっていない 2 頂点を両端点とする辺をグラフ H に追加し，グラフ G を生成する．

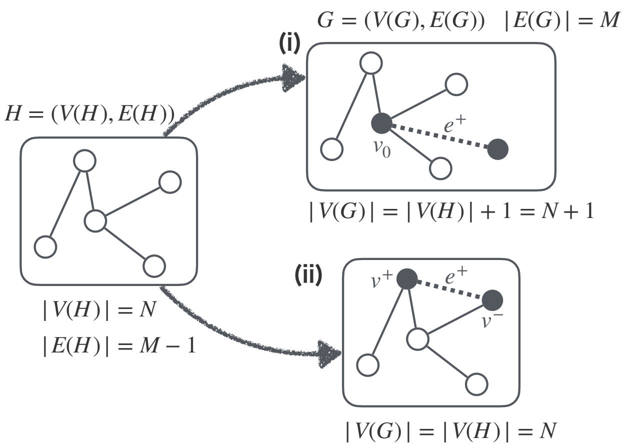

図 1: グラフ H に辺を 1 本追加しグラフ G を生成する 2 通りの手順例.

ケース (i) と (ii) それぞれに対して，グラフ G に対応する確率変数 K の分布関数を求める漸化式を導出する．以下では，グラフ $H = (V(H), E(H))$ を頂点数が $|V(G)| = N$，辺数が $|E(G)| = M - 1$ $(M \geq 2)$，連結で単純であるとする．また，グラフ H に対応するランダム K-out-of-$(M-1)$ システムの確率変数 K の分布関数を P_k^H $(k = 1, \ldots, M-1)$ とする．

命題 2. 任意の $v_0 \in V(H)$ をとり，v_0 と新たな頂点 $v^+ \notin V(H)$ を両端点とする辺 e^+ を考える．このとき，$V(G) := V(H) \cup \{v^+\}$，$E(G) := E(H) \cup \{e^+\}$ であるグラフ G に対応するランダム K-out-of-M システムの確率変数 K の分布関数 P_k^G は

$$P_k^G = \begin{cases} \left[P_k^H \binom{M-1}{k} + \binom{M-1}{k-1}\right] \Big/ \binom{M}{k} \\ \quad \text{if} \quad 1 \leq j \leq M-1 \text{ and } P_{k-1}^G < 1, \\ 1, \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

となる．ただし，$\binom{M-1}{0} = 1$ と定める．∎

命題 3. 隣接していない異なる 2 頂点 $v, u \in V(H)$ をとり，v と u を両端点とする辺 e^+ を考える．このとき，$V(G) := V^H$，$E(G) := E(G) \cup \{e^+\}$ であるグラフ G に対応するランダム K-out-of-$(M-1)$ システムの確率変数 K の分布関数 P_k^G は

$$P_k^G = \begin{cases} \left[P_k^H \binom{M-1}{k} + P_{k-1}^H \binom{M-1}{k-1} - n_k^H\right] \Big/ \binom{M}{k} \\ \quad \text{if} \quad 1 \leq k \leq M-1 \text{ and } P_{k-1}^G < 1, \\ 1, \quad \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

となる．ただし，n_k^H はサイズ $k-1$ の H-非連結化集合のうち「ある唯一の uv-カット集合 $F' \subset F_H$ があって，$F_H \setminus F'$ は H-非連結化集合ではない」をみたすものの個数である．また，$P_0^H \binom{M-1}{0} = 0$ と定める．∎

任意の単純で連結なグラフ G は，生成手順 (i) と (ii) を繰り返し用いることで生成することが可能である．そのため，命題 2 と命題 3 を繰り返し用いることで，任意の単純で連結なグラフ G が対応するランダム K-out-of-N システムの確率変数 K の分布関数を導出できる．最後に (1) を用いることで，グラフ G の故障分布関数を求めることができる．

当日の発表では主結果の略証を与えるとともに，簡単な例を示す予定である．

参考文献

[1] R. Barlow and F. Proschan, *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, 1965.

[2] C. Colbourn, *The Combinatorics of Network Reliability*, Oxford University Press, 1987.

[3] K. Ito, X. Zhao, amd T. Nakagawa, Random number of units for K-out-of-n systems, *Appl. Math. Model.*, **45** (2017), 563-572.