双曲錐の露出性について

05000745 統計数理研究所 *ロウレンソ 武流野 フィゲラ LOURENÇO Bruno F.
ニューサウスウェールズ大学 ROSHCHINA Vera
モナシュ大学 SAUNDERSON James

1. はじめに

本発表では [5] の概要を述べる．特に，**双曲錐** (hyperbolicity cone) という錐のクラスに関する様々な結果を述べる．

双曲錐を説明するために，まず**双曲多項式** (hyperbolic polynomial) を定義しておく．$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は斉次多項式とする．ある $e \in \mathbb{R}^n$ に対して，$p(e) > 0$ かつすべての x に対して一変数多項式

$$t \mapsto p(te - x) \tag{1}$$

が実根のみを持つとき，p は**双曲多項式**と呼ばれる．(1) の根を $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_r(x)$ と書く．p と e に関して凸錐

$$\Lambda_+(p, e) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, r\}.$$

を定義する．明らかではないが，$\Lambda_+(p, e)$ は閉凸錐である [2, 7]．$\Lambda_+(p, e)$ のように表される凸錐は**双曲錐**と呼ばれる．

例 1. $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が $p(x) := x_1 \cdots x_n$ とする．p は双曲多項式である．$e = (1, \ldots, 1)$ とすれば，$\Lambda_+(p, e)$ が非負象限 $\mathbb{R}^n_+$ になる．

例 2. $\mathcal{S}^n$ は $n \times n$ 実対称行列空間とする．$p : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ が $p(X) := \det X$ とする．p は双曲多項式である．I は $n \times n$ 単位行列とすれば，$\Lambda_+(p, I)$ が半正定値行列錐 $\mathcal{S}^n_+$ になる．

本発表では双曲錐の面の構造に関する様々な結果を紹介する．Renegar はすべての双曲錐が露出面錐 (facially exposed) であることを示した [7]．本研究では双曲錐が露出面性より強い性質を持つことを示す．

2. 面と露出性について

ここで，$\mathcal{K}$ が閉凸錐とする．次に，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ は閉凸錐とする．条件

$$x, y \in \mathcal{K}, x + y \in \mathcal{F} \Rightarrow x, y \in \mathcal{F}$$

が成り立てば，$\mathcal{F}$ を $\mathcal{K}$ の**面**という．さらに，もし $\mathcal{F}$ が $\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}$ の支持超平面の共通部分として表せる場合，$\mathcal{F}$ を**露出面** (exposed face) という．$\mathcal{K}$ のすべての面が露出面であれば，$\mathcal{K}$ を**面露出錐** (facially exposed cone) という．

これから，面露出錐より強い露出性の概念を紹介する．まず，必要な記号を定義する．$\mathbb{R}^n$ の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す．それによって，$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ というノルムを定義する．C, D が $\mathbb{R}^n$ に含まれている集合のとき，C と D の**距離**を以下のように定義する．

$$\mathrm{dist}\,(C, D) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in C, y \in D\}.$$

また，$\mathrm{span}\, C$ は C の線型包を表す．$\mathcal{K}^*$ と $\mathcal{K}^\perp$ はそれぞれ $\mathcal{K}$ の双対錐および $\mathcal{K}$ の直交補空間を表す．

定義 1 (露出性の概念). $\mathcal{F}$ は $\mathcal{K}$ の面とする．

(*i*) $P(\mathcal{K}) = \mathcal{F}$ を満たす線形射影 P（直交射影と限らない）が存在するとき，$\mathcal{F}$ は**射影的露出面**と呼ばれる．$\mathcal{K}$ のすべての面が射影的露出面の場合，$\mathcal{K}$ は**射影的露出錐** *(projectionally exposed cone)[1]* と呼ばれる．

(*ii*) ある $\kappa > 0$ に対して

$$\mathrm{dist}\,(x, \mathcal{F}) \leq \kappa \mathrm{dist}\,(x, \mathcal{K}), \quad \forall x \in \mathrm{span}\, \mathcal{F}$$

が成り立てば，$\mathcal{F}$ は**恭順面**と呼ばれる．$\mathcal{K}$ のすべての面が恭順面の場合，$\mathcal{K}$ は**恭順錐** *(amenable cone)[3]* と呼ばれる．

(*iii*) 等式

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{K}^* + \mathcal{F}^\perp,$$

が成り立てば，$\mathcal{F}$ は**ナイス面**と呼ばれる．$\mathcal{K}$ のすべての面がナイス面の場合，$\mathcal{K}$ は**ナイス錐** *(nice cone)[1, 6]* と呼ばれる．

以上の概念の中で次の関係が成り立つ [4]．射影的露出錐 ⇒ 恭順錐 ⇒ ナイス錐 ⇒ 面露出錐．$\mathcal{K}$ の次元が 3 以下の場合，面露出錐 ⇒ 射影的露出錐．また，$\mathcal{K}$ の次元が 4 以下の場合，恭順錐 ⇒ 射影的露出錐 [4]．しかし，

- ナイスではない面露出錐が存在する [8]，
- 恭順ではないナイス錐が存在する [4]，
- 射影的露出錐ではない恭順錐が存在するか知らていない（先程の結果によって，このような錐が存在すれば，次元が 5 以上である）．

3. 双曲錐と露出性

次の定理は我々の主な結果である．

定理 1. すべての双曲錐が恭順錐である． *[5]*

本発表では定理1が導かれるための必要な道具を紹介し，簡単に証明の概要を述べる．とくに，定理1を証明するために，双曲錐の面の構造を調べる必要があった．

たとえば，$\mathcal{F}$ が双曲錐 $\Lambda_+(p, e)$ の面の場合，$\mathcal{F}$ も双曲錐であるが，双曲多項式多項式 p との関係が明らかではない．$\mathcal{F}$ をなす双曲多項式多項式の作り方と p の関係も議論する．

参考文献

[1] J. Borwein and H. Wolkowicz. Regularizing the abstract convex program. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 83(2):495 – 530, 1981.

[2] L. Gårding. An inequality for hyperbolic polynomials. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 8(6):957–965, 1959.

[3] B. F. Lourenço. Amenable cones: error bounds without constraint qualifications. *Mathematical Programming*, 186:1–48, 2021.

[4] B. F. Lourenço, V. Roshchina, and J. Saunderson. Amenable cones are particularly nice. *arXiv e-prints*, November 2020. arXiv:2011.07745.

[5] B. F. Lourenço, V. Roshchina, and J. Saunderson. Hyperbolicity cones are amenable. *arXiv e-prints*, February 2021. arXiv:2102.06359.

[6] G. Pataki. The geometry of semidefinite programming. In H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of semidefinite programming: theory, algorithms, and applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[7] J. Renegar. Hyperbolic programs, and their derivative relaxations. *Foundations of Computational Mathematics*, 6(1):59–79, Feb 2006.

[8] V. Roshchina. Facially exposed cones are not always nice. *SIAM J. Optim.*, 24(1):257–268, 2014.